



*Filtragem de Tomografia Computadorizada de
Baixa Dosagem Utilizando Distâncias
Geodésicas*

Daniel de Almeida Góes

Maio / 2019

Dissertação de Mestrado em Ciência da
Computação

Filtragem de Tomografia Computadorizada de Baixa Dosagem Utilizando Distâncias Geodésicas

Esse documento corresponde à dissertação apresentada à Banca Examinadora no curso de Mestrado em Ciência da Computação da Faculdade Campo Limpo Paulista.

Campo Limpo Paulista, 5 de abril de 2019.

Daniel de Almeida Góes

Nelson Defino d'Ávila Mascarenhas (Orientador)

Agradecimentos

Agradeço a *Deus* por todas oportunidades que me trouxeram até aqui.

Sou grato ao apoio incondicional de minha *Família*.

Agradeço ao *Prof. Dr. Nelson Delfino d'Ávila Mascarenhas* pela orientação, conhecimento compartilhado e paciência, sem os quais esse trabalho não seria possível.

Aos *Professores do Programa de Mestrado em Ciência da Computação* com os quais eu tive o prazer de aprender. E a todos os *Funcionários* da UNIFACCAMP.

Aos membros da banca examinadora, *Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel*, *Prof. Dr. Luís Mariano del Val Cura* e *Prof. Dr. Jose Hiroki Saito* pela aceitação ao convite de participação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) que apoiou a realização do presente trabalho - Código de Financiamento 001.

Resumo. Devido à preocupação com a exposição de pacientes a raio-X, a dosagem usada na tomografia computadorizada pode ser reduzida (TCBD). Um dos efeitos da TCBD é a degradação da qualidade da imagem reconstruída final. Nesse trabalho propomos um método de filtragem de sinogramas de TCBD que são sujeitos a ruído Poisson dependente de sinal. Para filtragem desse ruído utilizamos uma abordagem Bayesiana, alterando o algoritmo Non-local Means (NLM) para utilizar distâncias estocásticas geodésicas para a distribuição Gama, conjugada da Poisson, como métrica de similaridade entre cada ponto de projeção. Entre as distâncias geodésicas avaliadas, encontramos uma solução fechada para a entropia de Shannon para distribuições Gama. Comparamos nosso método com os seguintes métodos baseados em NLM: Poisson-NLM, Stochastic Poisson NLM e o NLM original após transformada de Anscombe. Também comparamos com o BM3D após transformada Anscombe. As comparações foram feitas nas imagens finais reconstruídas pelos métodos Filtered-Back Projection (FBP) e Projection onto Convex Sets (POCS) utilizando as métricas, PSNR e SSIM.

Abstract. Due to the concerns related to patient exposure to X-ray, the dosage used in computed tomography may be reduced (TCBD). One of the effects of TCBD is the degradation in the quality of the final reconstructed image. In this work, we propose a method of filtering TCBD sinograms that are subject to signal-dependent Poisson noise. To filter this type of noise, we use a Bayesian approach, changing the Non-local Means (NLM) algorithm to use geodesic stochastic distances for Gamma distribution, the conjugate prior to Poisson, as a similarity metric between each projection points. Among the geodesic distances evaluated, we found a closed solution for the Shannon entropy for Gamma distributions. We compare our method with the following methods based on NLM: Poisson-NLM, Stochastic Poisson NLM, Stochastic Gamma NLM and the original NLM after Anscombe transform. We also compare with BM3D after Anscombe transform. Comparisons are made on the final images reconstructed by the Filtered-Back Projection (FBP) and Projection onto Convex Sets (POCS) methods using the metrics, PSNR and SSIM.

Sumário

Sumário	6
Lista de Tabelas	10
Lista de Figuras	11
1 Introdução	12
1.1 Revisão bibliográfica	12
1.2 Objetivos	15
1.3 Organização do Trabalho	15
2 Tomografia Computadorizada	17
2.1 Projeções Tomográficas	17
2.2 CT de baixa dosagem	19
2.3 Ruído	19
2.3.1 Modelo de Ruído Simplificado	21
2.4 Reconstrução	21
2.4.1 Filtered Back Projection (FBP)	23
2.4.2 Projection onto Convex Sets (POCS)	24
3 Non-Local Means	25
3.1 Definição	26
3.2 Aplicação em LDCT	27
4 Outros Métodos de Filtragem	28
4.1 Transformada de Anscombe	28
4.2 Métodos de Filtragem de Ruído Poisson baseados em NLM	29
4.2.1 Poisson-NLM	29
4.2.2 Stochastic Poisson NLM	29

4.2.2.1	<i>Bhattacharyya</i>	30
4.2.2.2	<i>Hellinger</i>	30
4.2.2.3	<i>Kullback–Leibler</i>	30
4.2.2.4	<i>Rényi</i>	30
4.2.3	NLM Distâncias Estocásticas	30
4.2.3.1	<i>Kullback–Leibler</i>	31
4.2.3.2	<i>Rényi</i>	31
4.2.3.3	<i>Hellinger</i>	31
4.2.3.4	<i>Bhattacharyya</i>	31
4.3	BM3D	32
5	Fundamentos Teóricos	33
5.1	Processo de Detecção dos Feixes	33
5.2	Abordagem Bayesiana	33
5.2.1	Estimativa de Parâmetros	34
5.3	Distâncias Geodésicas	35
6	Método de Filtragem Geodésico	38
6.1	Cálculo das Distâncias Geodésicas Numéricas	39
6.2	Processo de Filtragem	39
7	Método de Avaliação de Resultados	41
7.1	Conjunto de Testes	41
7.2	Métodos Avaliados	44
7.3	Parâmetros Considerados na reconstrução	44
7.4	Métricas	44
7.4.1	Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)	45
7.4.2	Structural Similarity Index (SSIM)	45
8	Resultados	47
8.1	Resultados Shepp-Logan	48
8.2	Resultados Assimétrico	53
8.3	Resultados Simétrico	58

8.4	Resultados Homogêneo	63
8.5	Resultados Madeira 1	68
8.6	Resultados Madeira 2	73
8.7	Avaliação dos Resultados	78
8.7.1	Método Proposto comparado ao de Evangelista	78
8.7.2	Método Proposto comparado ao P-NLM	79
8.7.3	Método Proposto Comparado ao BM3D	79
9	Conclusões e Trabalhos Futuros	81
9.1	Artigo Submetido	82
	Anexo	83
	Arimoto	83
	Havrda-Charvát	85
	Rényi	86
	Referências Bibliográficas	87

Glossário

BM3D - Block-matching and 3D filtering

CT - Computed Tomography

FBP - Filtered Back Projection

LDCT - Low dose Computed Tomography

NLM - Non-Local Means

MAP - Maximum a Posteriori

POCS - Projection onto Convex Sets

PSNR - Peak Signal to Noise Ratio

SP-NLM - Stochastic Poisson Non-Local Means

SSIM - Structural Similarity Index

Lista de Tabelas

5.1	(h, ϕ) -entropies and their respective $h(x), \phi(x)$ functions	35
8.1	Resultados Shepp-Logan	48
8.2	Resultados Assimétrico	53
8.3	Resultados Simétrico	58
8.4	Resultados Homogêneo	63
8.5	Resultados Madeira 1	68
8.6	Resultados Madeira 2	73

Lista de Figuras

2.1	Transformada de Radon. ¹	18
2.2	Sinograma de tomografia computadorizada.	19
3.1	Sinograma de tomografia computadorizada.	25
5.1	Entropia H_{ϕ}^h Arimoto associada a Gama.	36
7.1	Imagens de referência livres de ruído reconstruídas com POCS	42
8.1	Imagens dos resultados Shepp-Logan para reconstrução FBP	49
8.2	Imagens dos resultados Shepp-Logan para reconstrução POCS	51
8.3	Imagens dos resultados do phantom Assimétrico para reconstrução FBP	54
8.4	Imagens dos resultados do phantom Assimétrico para reconstrução POCS	56
8.5	Imagens dos resultados do phantom Simétrico para reconstrução FBP	59
8.6	Imagens dos resultados do phantom Simétrico para reconstrução POCS	61
8.7	Imagens dos resultados do phantom Homogêneo para reconstrução FBP	64
8.8	Imagens dos resultados do phantom Homogêneo para reconstrução POCS	66
8.9	Imagens dos resultados do phantom Madeira 1 para reconstrução FBP	69
8.10	Imagens dos resultados do phantom Madeira 1 para reconstrução POCS	71
8.11	Imagens dos resultados do phantom Madeira 2 para reconstrução FBP	74
8.12	Imagens dos resultados do phantom Madeira 2 para reconstrução POCS	76

1 Introdução

Tomografia Computadorizada é uma técnica em que se utiliza radiação, raio-X sendo o mais comum, para gerar imagens de cortes do objeto escaneado. Para isso são feitas projeções em vários ângulos com a radiação e o conjunto dessas projeções é chamado de sinograma. Técnicas de reconstrução são aplicadas ao sinograma para se obter a imagem final.

Devido à preocupação na comunidade médica com a quantidade de radiação a que um paciente é submetido [Savage (2010), Liang et al. (2017)], foram desenvolvidas técnicas de (LDCT na sigla em inglês) em que são utilizadas doses de radiação mais baixas possíveis.

Uma das principais utilizações das técnicas de LDCT é a detecção precoce de câncer de pulmão. Por esse tipo de câncer não demonstrar “sinais” nos estágios iniciais, é um dos maiores causadores de mortes (Wood et al. (2018)). Grupos de riscos são recomendados a fazer triagem periódica através por LDCT devido a redução na exposição rotineira à radiação.

Os dados de tomografia computadorizada são corrompidos com ruído dependente de sinal que pode ser modelado como um ruído Poisson (Liang, Riviere, Fakhri, Glick & Siewerdsen (2017)). Com a redução da exposição dos detectores à radiação, a degradação por ruído é acentuada.

Esse trabalho estuda um método não local para filtragem de sinogramas corrompidos com ruído Poisson obtidos por LDCT.

1.1. Revisão bibliográfica

Um método simples para filtragem de ruído é através de convolução, utilizando um filtro da média, ou um kernel gaussiano. Outros métodos mais robustos foram propostos, como os baseados em Wavelets, Mallat (2008).

Buades et al. (2005) apresentaram um novo algoritmo para filtragem de imagens corrompidas por ruído gaussiano usando um conceito não local de filtragem, onde um pixel é filtrado por uma média ponderada de pixels semelhantes. Esse algoritmo se baseia na distância euclidiana de uma vizinhança centrada no pixel para comparação de pixels da imagem. Outros autores modificaram esse algoritmo para utilização de outras distâncias, como Leng (2017), que utiliza informação de gradiente de uma imagem pré-filtrada assim como o kernel gaussiano para o cálculo do coeficiente de peso do NLM. Structural Similarity Index (SSIM) pode ser também utilizado como métrica para comparar os patches, como demonstrado por Rehman & Wang (2011).

Seguindo a metodologia de filtragem não local, Dabov et al. (2007) propuseram um outro algoritmo de filtragem em que a imagem é dividida em patches, o patch sendo filtrado é agrupado a outros semelhantes e organizados em blocos (tridimensionais), os pesos da média ponderada utilizada na filtragem são calculados através de estimadores de Wiener (1949).

Métodos utilizando abordagens não locais foram propostos utilizando o filtro de Wiener como em Bindilatti et al. (2018). Aplicações de reconstrução tomográfica também utilizam filtros de Wiener, como em Pereira & Cruvinel (2015), onde foi proposta uma reconstrução volumétrica utilizando esses filtros.

Outros autores modificaram o NLM para filtragem de imagens corrompidas com outros tipos de ruído que não o gaussiano. Santos (2017) e Zhong et al. (2011) filtram ruído speckle em imagens de ultrassom e imagens de radar de abertura sintética (SAR) respectivamente.

Deledalle et al. (2010) propuseram uma modificação do NLM para filtrar ruído Poisson. Em sua tese, Deledalle (2011), modifica o NLM para ruídos que obedecem outras distribuições.

Em LDCT, o Non-Local Means pode ser utilizado na filtragem de imagens já reconstruídas assim como também para filtragem de sinogramas, Zhang H. et al. (2017). Assis et al. (2015) propuseram filtragem dupla para LDCT, filtrando tanto o sinograma como a imagem após ser reconstruída.

Em Granato et al. (1998), os autores filtraram imagens obtidas de um mesmo objeto com níveis de radiações distintos, utilizando das informações dessas diferentes imagens para estimar os valores dos pixels livres de ruído.

Estimadores MAP também podem ser utilizados ao filtrar imagens de CT, Geraldo et al. (2017). No trabalho, os autores propuseram modelar imagem utilizando diversas distribuições de probabilidade, a imagem é então segmentada pelo histograma, e para cada segmento, a distribuição escolhida é a que melhor o descreve.

Outras abordagens também foram propostas, como em Salvadeo et al. (2016) em que o autor propõe uma filtragem utilizando Campos Aleatórios Markovianos.

Na filtragem de sinogramas também são utilizados estimadores MAP, Mascarenhas, Nelson et al. (1996). Os autores desse artigo comparam diversas distribuições de probabilidade para modelar o sinograma, chegando à conclusão de que a distribuição Gaussiana não é o melhor modelo.

Em Ribeiro (2010), o método proposto por Mascarenhas, Nelson et al. (1996) é modificado para que a distribuição de probabilidade que modela o sinograma seja escolhida de forma adaptativa para a janela centrada em cada ponto de projeção.

A transformada de Anscombe (1948) pode ser utilizada para filtrar sinogramas utilizando métodos desenvolvidos para filtragem de imagens. Como em Pinheiro (2017), onde o autor utiliza métodos utilizando wavelets para filtrar sinogramas no domínio Anscombe.

Evangelista (2017) propõe um método de filtragem de sinograma de CT de baixa dosagem em que se supõe que tais sinogramas são degradados por ruído Poisson, e que os patches obedecem à distribuição Gama, por essa ser a conjugada a priori da distribuição Poisson (ver seção 5.2). Distancias baseadas em divergência estocásticas são utilizadas para comparar os patches do sinograma.

Distâncias geodésicas podem ser utilizadas para comparar “patches” de imagens, em Naranjo-Torres et al. (2017) o autor utiliza essas distâncias para gerar descritores de textura que são utilizados em métodos reconhecimento de padrões em imagens provenientes de radares de abertura sintética. Em imagens de ultrassom, distâncias geodésicas foram utilizadas em Santos & Mascarenhas (2019) para filtragem de ruído e para segmentação.

1.2. Objetivos

Motivado pela preocupação em reduzir a exposição de pacientes a radiação, o objetivo desta dissertação é analisar, adaptar e desenvolver um método para filtragem de sinogramas provenientes de Tomografias Computadorizadas de Baixa Dosagem afim de reduzir ruído, agravado pela pouca dose de radiação utilizada.

De forma mais específica, o método proposto adapta o algoritmo Non-Local Means, Buades et al. (2005), para utilizar distâncias mais representativas para o domínio do problema considerado. Utilizando uma abordagem Bayesiana, são analisadas diferentes distâncias estocásticas geodésicas como métrica de similaridade entre cada ponto de projeção.

1.3. Organização do Trabalho

No Capítulo 2, é detalhada a Tomografia Computadorizada, Tomografia de baixa dosagem, ruído Poisson a que esses dados estão sujeitos e formas de reconstruir a imagem do objeto sendo escaneado.

No Capítulo 3, é descrito o algoritmo do Non-Local Means em que esse trabalho se baseia.

No Capítulo 4, são descritos métodos alternativos de filtragem de sinograma ao qual iremos comparar o método proposto neste trabalho.

No Capítulo 5, são abordados os princípios teóricos que embasam a proposta deste trabalho.

No Capítulo 6, descrevemos o funcionamento do método proposto.

No Capítulo 7, detalha como os testes foram executados, e as métricas utilizadas para comparar os resultados.

No Capítulo 8, os resultados obtidos são apresentados e discutidos.

No Capítulo 9, concluímos o trabalho. Analisando algumas conclusões obtidas, vantagens e desvantagens do método proposto.

No Anexo estão os resultados obtidos para os tensores g_{ij} detalhados na seção 5.3.

2 Tomografia Computadorizada

Tomografia Computadorizada (CT na sigla em inglês) é uma técnica de obtenção de imagens de corte de um objeto escaneado. Uma tomografia de raio-X é um método em que radiação é emitida por uma fonte, passa por um objeto, sendo atenuada por ele, e é então captada por detectores. Nesse processo são feitas várias projeções em diferentes ângulos para obter as informações necessárias para se reconstruir a imagem de corte.

2.1. Projeções Tomográficas

Em cada feixe, os fótons emitidos são dispersos ou absorvidos ao passar pelo objeto. Denotando essa atenuação pelo coeficiente μ , quantidade de fótons esperada na captação pode ser dada por [Rosenfeld & Kak (1982)]:

$$\lambda_d = \lambda_0 \exp\left(- \int_{\text{feixe}} \mu(x, y) ds\right) \quad (2.1)$$

onde λ_d é a quantidade de fótons detectada, λ_0 , os fótons emitidos, $\mu(x, y)$ o coeficiente de atenuação na posição (x, y) e ds é o diferencial tomado no comprimento do feixe. Da equação (2.1) tem-se que:

$$\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_d}\right) = \int_{\text{feixe}} \mu(x, y) ds \quad (2.2)$$

O valor $\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_d}\right)$ é conhecido pois λ_0 é um valor dado ou pode ser estimado a partir o maior valor observado de todas as projeções. Dessa forma o conjunto dos valores $\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_d}\right)$ de todas as projeções pode ser visto como uma transformada Radon do objeto escaneado.

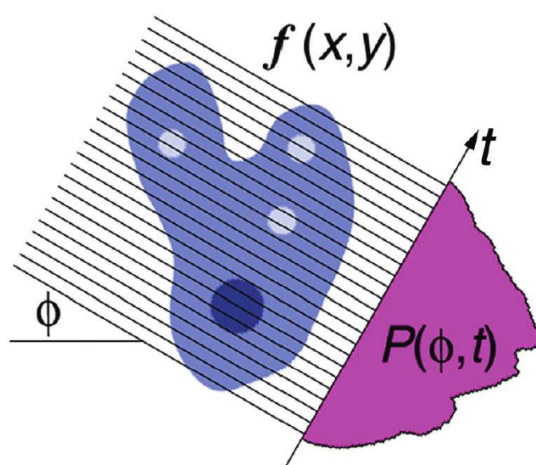


Figura 2.1. Transformada de Radon.¹

A transformada de Radon recebe uma função $f(x, y)$, e calcula integrais de linha dessa função, chamados de raios. O conjunto de raios perpendiculares é chamado de projeção, e as projeções são calculadas para vários ângulos. Uma projeção pode ser descrita por:

$$P_{\theta}(t) = \int_{\text{feixe } AB} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - t) dx dy \quad (2.3)$$

onde $P_{\theta}(t)$ é a projeção paralela para um ângulo θ , t é a projeção do feixe AB e é dado por: $t = x \cos \theta + y \sin \theta$.

A matriz de projeções da transformada de Radon também é conhecida como sinograma, pois um alvo não centralizado gera uma forma senoidal.

Os dados de projeção de tomografia podem ser dados tanto por fótons transmitidos calibrados (antes do log, eq. 2.2) ou integrais de linha calibrados (após log). Em ambos os casos a matriz de projeção pode ser referida como sinograma.

Os dados de projeções de fótons transmitidos calibrados obedecem a distribuição de Poisson, como descrito anteriormente. No caso de integrais de linha calibrados, os dados podem ser aproximados por uma distribuição Gaussiana com variância não linear dependente de sinal, Zhang et al. (2018).

¹Imagem retirada de The Image Processing Handbook, 7ª edição Russ & Neal (2015), pg. 769



Figura 2.2. Sinograma de tomografia computadorizada.

2.2. CT de baixa dosagem

Devido a preocupação com a exposição de pacientes à radiação foram desenvolvidas técnicas de tomografia computadorizada de baixa dosagem (LDCT) em que são utilizadas doses de radiação mais baixas possíveis.

Essa redução pode ser feita pela redução do número de projeções efetuadas, reduzindo a intensidade de radiação emitida durante processo, ou encurtando o tempo de exposição do detector. Nesse trabalho trabalhamos com dados que foram obtidos ao reduzir o tempo de exposição de cada projeção.

2.3. Ruído

Reduzir o tempo de exposição implica em perda de qualidade da imagem reconstruída. Assim é necessário a adoção de métodos para filtragem de ruído.

O emissor de raio-X de um scanner para tomografia computadorizada emite um feixe poli energético [Elbakri & Fessler (2003)]. Materiais possuem coeficientes de atenuação distintos para cada banda de energia, Granato et al. (1998), assim o feixe incidente em um receptor pode ser descrito como policromático, Gu & Dogandžić (2016).

O processo de detecção, em um tomógrafo, integra a radiação incidente, em seu espectro, podendo ser descrito da seguinte forma, Fan et al. (2010), Whiting (2006):

$$Y = \frac{\lambda^N e^{-\lambda}}{N!} \int_0^{Kev} \Phi(E) dE \quad (2.4)$$

onde N é a quantidade de fótons de raio-X detectados e uma variável aleatória Poisson com média λ . $\Phi(E)$ é o espectro de energia do feixe.

Como a medição é feita de forma discreta, a equação 2.4 pode ser reescrita como:

$$Y = \sum_{n=1}^N \Phi_n \quad (2.5)$$

onde N obedece a uma distribuição Poisson, e Φ_n são variáveis aleatórias que modelam o espectro incidente.

Uma distribuição Poisson Composta é uma distribuição de probabilidade descrita da a mesma forma que a equação 2.5 em que: todas Φ_n são variáveis aleatórias, que possuem a mesma distribuição de probabilidade, são mutualmente independentes e são independentes de N .

Ao modelar projeções de tomográficas como distribuições Poisson Composta, pode ser utilizada a distribuição de Poisson para descrever Φ_n , mas outras distribuições como Gama e Gaussiana, Fan et al. (2010), ou uma distribuição estimada do próprio espectro incidente, Idris A. Elbakri (2003).

Em Fan et al. (2010), os autores apresentam soluções fechadas para os dois primeiros momentos da distribuição Poisson Composta e estimadores dos parâmetros de Φ_n para as distribuições Poisson, Gama e Gaussiana. No entanto para fazer essas estimações é necessário utilizar informações espectrais do feixe incidente, sem os quais não é possível estimar esses parâmetros.

Considerando ruído térmico e ruído de fundo eletrônico, a essa distribuição Poisson Composta é somada uma Gaussiana, Liang et al. (2017).

Como demonstrado por Xing et al. (2017), o modelo do processo de aquisição pode ser simplificado por uma distribuição Poisson deslocada.

$$Pr(y_i = k | \lambda_i, \sigma) = \frac{e^{-(\lambda_i + \sigma^2)} (\lambda_i + \sigma^2)^k}{k!} \quad (2.6)$$

onde σ^2 é a variância de uma distribuição Gaussiana com média 0.

Nesse trabalho utilizaremos uma abordagem Bayesiana, fazendo uso da propriedade de que a distribuição Gama é conjugada da Poisson, seção 5.2. Como a Poisson Composta não tem essa relação de conjugação com a distribuição Gama, assumimos um modelo simplificado do ruído.

A utilização da distribuição de Poisson deslocada acrescentaria uma outra variável a ser estimada, σ^2 , o que tornaria inviável a estimação dos parâmetros a posteriori da distribuição Gamma conjugada, seção 5.2.1.

2.3.1. Modelo de Ruído Simplificado

Nesse trabalho consideramos o modelo de em que a detecção consiste em contar a quantidade de fótons incidentes, assim obedecendo uma distribuição Poisson típica.

O valor de cada ponto em uma projeção, y_i , no modelo de contagem de fótons, pode ser modelado como um processo aleatório Poisson, representado pela equação:

$$Pr(y_i = k | \lambda_i) = \frac{e^{-\lambda_i} \lambda_i^k}{k!} \quad (2.7)$$

onde λ_i é a taxa média de fótons que chegam ao detector i e y_i é a quantidade observada. $Pr(y_i = k | \lambda_i)$ é a probabilidade de y_i assumir o valor k , $k \in \mathbb{Z}^+$, com uma taxa de fótons λ_i .

2.4. Reconstrução

Após o processo de obtenção das projeções por raio-X, os dados obtidos são processados para se reconstruir a imagem de corte do objeto escaneado original.

É possível inverter a transformada de Radon utilizando o teorema da fatia de Fourier, como demonstrado em Rosenfeld & Kak (1982). De forma conceitual, a transformada de Fourier de uma projeção calculada a partir de um ângulo θ , é igual a transformada bidimensional da imagem a ser reconstruída tomada no ângulo θ passando pela origem.

Seja $F(u, v)$ a transformada de Fourier bidimensional da imagem $f(x, y)$, e $S_\theta(w)$ a transformada unidimensional da projeção $P_\theta(t)$:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2.8)$$

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j2\pi wt} dt \quad (2.9)$$

como:

$$P_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds \quad (2.10)$$

onde (t, s) é um sistema de coordenadas ortogonais rotacionado.

$$\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

temos:

$$S_\theta(w) = \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j2\pi wt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) ds e^{-j2\pi wt} dt \quad (2.12)$$

transformando de (t, s) para (x, y) ,

$$\begin{aligned} S_\theta(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(t) e^{-j2\pi wt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \\ &= F(u, v) \quad \text{para } u = w \cos \theta, \quad v = w \sin \theta \\ &= F(w, \theta) \end{aligned} \quad (2.13)$$

aplicando a transformada inversa de Fourier obtém-se a seguinte expressão:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (2.14)$$

Reconstruir a imagem pelo método descrito pela equação (2.14) não é viável pois seria necessário calcular a transformada inversa de Fourier no espaço polar. Para reconstruir a imagem se faz necessário a adoção de outros métodos. Nos limitamos nesse trabalho à utilização de dois métodos de reconstrução, Filtered Back Projection (FBP) e Projection onto Convex Sets (POCS).

2.4.1. Filtered Back Projection (FBP)

Filtered Back Projection (FBP) é um dos métodos de reconstrução mais utilizados. Esse método consiste em re-projetar cada uma das projeções observadas, depois de filtradas, de volta no domínio da imagem, “borrando” a região que deu origem a essa projeção. Ao repetir o processo para vários ângulos, a superposição das intensidades revela a imagem do objeto que deu origem a essas projeções.

Reescrevendo a equação (2.14) em coordenadas polares,

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} F(w, \theta) |w| e^{j2\pi w t} dw d\theta \quad (2.15)$$

que pode ser expressa como:

$$f(x, y) = \int_0^\pi Q_\theta(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta \quad (2.16)$$

$$Q_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(w, \theta) |w| e^{j2\pi w t} dw \quad (2.17)$$

onde $Q_\theta(t)$ é a convolução de P com $IFT\{|w|\}$, IFT denotando a transformada inversa de Fourier.

Ao se passar para o domínio discreto, a reconstrução da imagem tomográfica é descrita através das seguintes equações:

$$Q_\theta(n\tau) = \tau \times (P_\theta(\tau) * IFT\{|w|\}) \quad (2.18)$$

$$f(x, y) = \frac{\pi}{k} \sum_{i=1}^k Q_{\theta_i}(x \cos \theta_i + y \sin \theta_i) \quad (2.19)$$

onde τ é a resolução de um pixel da imagem. Em implementações típicas desse método, a convolução presente na equação (2.18) é executada no domínio da frequência.

2.4.2. Projection onto Convex Sets (POCS)

Projection onto Convex Sets (POCS) é um método de reconstrução tomográfica que se baseia em geometria computacional, Youla & Webb (1982). Ele consiste em uma técnica de reconstrução algébrica que, a partir dos dados tomográficos, definem-se conjuntos convexos C_i , que representam restrições para uma solução viável. Nesse trabalho utilizamos a versão proposta por Salina & Mascarenhas (2005) em que outras restrições também são acrescentadas, como Restrição de Não Negatividade (valores dos pixels iguais ou maiores que zero), Restrição de Amplitude Limitada (valores de pixels entre 0 e 255), Restrição de Suporte Finito (valores fora da região reconstruída nulos).

Com os conjuntos definidos, é aplicado o algoritmo POCS stricto sensu [Bauschke & Borwein (1996)] que consiste em encontrar a intersecção entre tais conjuntos, intersecção essa que representa uma solução possível para a reconstrução.

3 Non-Local Means

Originalmente proposto por Buades et al. (2005), o Non-Local Means é um método de filtragem de ruído Gaussiano. Nesse algoritmo, a vizinhança, janela de similaridade, em torno do pixel sendo filtrado, é comparada com outros patches, de mesmo tamanho, centrados em outros pixels da imagem. Com essas comparações, o pixel é filtrado calculando uma média ponderada entre os pixels com janela de similaridade mais próximas ao pixel original.

Nesse trabalho utilizaremos uma variação do método que limita a comparação com pixels dentro de uma janela de busca. Essa alteração torna o método mais eficiente ao reduzir a complexidade assintótica do algoritmo. Na versão original onde a busca é feita em toda a imagem, a complexidade é de $O(N^2 \cdot P)$, onde N é o número de pixels na imagem, e P o número de pixels na janela de similaridade. A versão utilizando janela de busca possui complexidade $O(N \cdot |B| \cdot P)$, onde $|B|$ é o tamanho da janela de busca em número total de pixels.

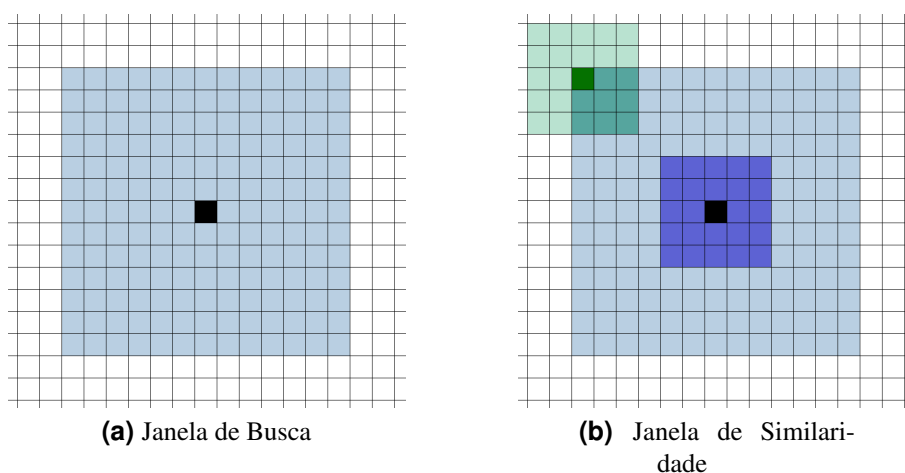


Figura 3.1. Sinograma de tomografia computadorizada.

3.1. Definição

Formalmente, o Non-Local Means utilizando janela de busca pode ser descrito da seguinte forma:

Dada uma imagem ruidosa $Y = \{y_i | i \in I\}$ resultante de uma degradação de uma imagem original, livre de ruído, $X = \{x_i | i \in I\}$ por ruído Poisson, o Non-Local Means (NLM) busca obter uma estimativa $\hat{X} = \{\hat{x}_i | i \in I\}$ para a imagem X , onde cada pixel \hat{x}_i é calculado por:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{w_i} \sum_{j \in B(i,r)} w_{ij} y_j \quad (3.1)$$

onde $0 \leq w_{ij} \leq 1$, $w_i = \sum_{j \in B(i,r)} w_{ij}$ e $B(i, r)$ indica a janela de busca de tamanho r , centrada em i .

Os pesos w_{ij} são calculados através da fórmula:

$$w_{ij} = \exp\left(\frac{-1}{h^2} \|y_i - y_j\|_{2,a}^2\right) \quad (3.2)$$

onde h é um parâmetro que controla a intensidade do filtro, y_i e y_j são vetores $|P|$ -dimensionais representando a janela de similaridade centradas em i e j respectivamente.

Quando o parâmetro h tende a zero ($h \rightarrow 0$), a imagem se aproxima a imagem original, quando tende a infinito ($h \rightarrow \infty$), o resultado se assemelha a um filtro da média.

A expressão $\|y_i - y_j\|_{2,a}^2$ representa o quadrado da distância Euclidiana utilizando um *kernel* Gaussiano com desvio padrão a .

$$\|y_i - y_j\|_{2,a}^2 = \frac{1}{\sum_{p \in P} g_a(p)} \left(\sum_{p \in P} g_a(p) \cdot \|y_{i-p} - y_{j-p}\|^2 \right) \quad (3.3)$$

3.2. Aplicação em LDCT

O algoritmo NLM pode ser aplicado em CT de baixa dosagem para melhorar a qualidade da imagem em diferentes senários.

Em aquisições de baixo fluxo, obtidas pela redução na emissão de radiação ou redução no tempo de exposição, o NLM pode ser utilizado na filtragem da imagem reconstruída ou na filtragem no domínio das projeções.

No caso de projeções com projeções esparsas os métodos geralmente se limitam a filtragem no domínio da imagem [Zhang et al. (2018)].

4 Outros Métodos de Filtragem

Nesse capítulo introduzimos abordagens de filtragem, presentes na literatura, que serão utilizadas como referência. Essas se dividem em abordagens baseadas em NLM, modificadas para filtrar ruído Poisson. E o método, no estado da arte, BM3D aplicado no domínio Anscombe.

4.1. Transformada de Anscombe

A transformada de Anscombe transforma uma variável aleatória Poisson em uma variável aleatória que aproximadamente obedece a uma distribuição Gaussiana, com desvio padrão aproximadamente constante. Dessa forma, métodos voltados para filtragem de ruído Gaussiano podem ser utilizados para entradas degradadas com ruído Poisson. Transformada de Anscombe:

$$A : z \mapsto 2\sqrt{y + \frac{3}{8}} \quad (4.1)$$

Devido à não linearidade da transformada, a formula inversa algébrica geralmente não é utilizada. Uma vez os dados filtrados, ela introduz um viés na estimativa da média μ :

$$y \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{3}{8} \quad (4.2)$$

Para mitigar o viés, utiliza-se a inversa assintoticamente não enviesada:

$$A^{-1} : y \mapsto \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{3}{1} \quad (4.3)$$

Nesse trabalho utilizamos a transformada Anscombe em conjunto com os métodos de filtragem NLM e BM3D, descritos nas sessões 3.1 e 4.3, respectivamente.

4.2. Métodos de Filtragem de Ruído Poisson baseados em NLM

4.2.1. Poisson-NLM

Poisson NLM (P-NLM) é uma variação do NLM, proposta por Deledalle et al. (2010), para filtragem de imagens corrompidas por ruído Poisson. Essa variação faz uso de uma imagem pré-filtrada ao calcular os pesos w_{ij} , alterados do algoritmo original.

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \sum_P f(y_{i-p}, y_{j-p}) - \frac{1}{\beta} \sum_P g(\hat{\lambda}_{i-p}, \hat{\lambda}_{j-p})\right) \quad (4.4)$$

onde

$$f(y_1, y_2) = y_1 \log y_1 + y_2 \log y_2 - (y_1 + y_2) \log \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad (4.5)$$

$$g(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2) = (\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2) \log \left(\frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2}\right) \quad (4.6)$$

sendo P os pixels da janela de similaridade, y_{i-p} o pixel p da janela centrada em i da imagem ruidosa original. $\hat{\lambda}_{i-p}$ o pixel p da janela centrada em i da imagem pré-filtrada; f mede a similaridade entre dois pixels da imagem ruidosa e g da imagem pré-filtrada; α e β nessa equação são parâmetros que ponderam a influência de f e g e são calculados automaticamente para minimizar o critério se soma de erros absolutos quadrados.

4.2.2. Stochastic Poisson NLM

Stochastic Poisson NLM (SP-NLM) é um algoritmo desenvolvido por Bindilatti & Mascarenhas (2013) que modifica o NLM substituindo a distância euclidiana por distâncias estocásticas entre distribuições Poisson.

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{h\hat{\sigma}_i} \sum_P d(\hat{\lambda}_{i-p}, \hat{\lambda}_{j-p})\right) \quad (4.7)$$

onde h controla a intensidade do filtro, $\hat{\sigma}_i$ é a estimativa do desvio padrão do ruído, $\hat{\lambda}_i$ é uma estimativa do pixel livre de ruído calculado pelo estimador de máxima verossimilhança

para distribuição Poisson e d é uma das distâncias estocásticas entre distribuições Poisson. As distâncias foram calculadas para as divergências de Bhattacharyya, Hellinger, Kullback–Leibler e Rény.

4.2.2.1. Bhattacharyya

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) - \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.8)$$

4.2.2.2. Hellinger

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}\right) \quad (4.9)$$

4.2.2.3. Kullback–Leibler

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} \left((\lambda_1 - \lambda_2) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \quad (4.10)$$

4.2.2.4. Rényi

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\beta - 1} \ln \left(\frac{e^{-\lambda_2 + \beta(\lambda_2 - \lambda_1) + \lambda_1^\beta \lambda_2^{(1-\beta)}} + e^{-\lambda_1 + \beta(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_2^\beta \lambda_1^{(1-\beta)}}}{2} \right) \quad (4.11)$$

4.2.3. NLM Distâncias Estocásticas

Evangelista (2017) propôs uma alteração ao SP-NLM, utilizando uma abordagem bayesiana ao substituir distâncias estocásticas entre distribuições Poisson por distâncias entre distribuições Gama, conjugada da Poisson (ver seção 5.2). O cálculo do peso w_{ij} se mantém igual ao do SP-NLM (equação 4.7). Enquanto as distâncias são substituídas pelas suas alternativas calculadas para Gama:

4.2.3.1. Kullback–Leibler

$$\begin{aligned}
d_{KL}(p; q) = & \left(\sum_{j=1}^N \left[\left(\alpha_j^{(q)} - 1 \right) \psi(\alpha_j^{(q)}) - \log \beta_j^{(q)} - \alpha_j^{(q)} - \log \Gamma(\alpha_j^{(q)}) \right. \right. \\
& + \log \Gamma(\alpha_j^{(p)}) + \alpha_j^{(p)} \log \beta_j^{(p)} - \left. \left. \left(\alpha_j^{(p)} - 1 \right) \left(\psi(\alpha_j^{(q)}) + \log \beta_j^{(q)} \right) + \frac{\alpha_j^{(q)} \beta_j^{(q)}}{\beta_j^{(p)}} \right] \right. \\
& + \sum_{j=1}^N \left[\left(\alpha_j^{(p)} - 1 \right) \psi(\alpha_j^{(p)}) - \log \beta_j^{(p)} - \alpha_j^{(p)} - \log \Gamma(\alpha_j^{(p)}) \right. \\
& + \log \Gamma(\alpha_j^{(q)}) + \alpha_j^{(q)} \log \beta_j^{(q)} - \left. \left. \left(\alpha_j^{(q)} - 1 \right) \left(\psi(\alpha_j^{(p)}) + \log \beta_j^{(p)} \right) + \frac{\alpha_j^{(p)} \beta_j^{(p)}}{\beta_j^{(q)}} \right] \right) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

onde $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

4.2.3.2. Rényi

$$\begin{aligned}
d_R^a(p; q) = & \left(\left(\ln \left(\frac{\Gamma(\kappa_p) \theta_p^{\kappa_p}}{\Gamma(\kappa_q) \theta_q^{\kappa_q}} \right) + \frac{1}{\alpha - 1} \ln \left(\frac{\Gamma(\kappa_a)}{\Gamma(\kappa_q) \theta_q^{\kappa_q}} \left(\frac{\theta_p \theta_q}{\theta_a^*} \right)^{\kappa_a} \right) \right) \right. \\
& \left. + \left(\ln \left(\frac{\Gamma(\kappa_q) \theta_q^{\kappa_q}}{\Gamma(\kappa_p) \theta_p^{\kappa_p}} \right) + \frac{1}{a - 1} \ln \left(\frac{\Gamma(\kappa_a)}{\Gamma(\kappa_p) \theta_p^{\kappa_p}} \left(\frac{\theta_q \theta_p}{\theta_a^*} \right)^{\kappa_a} \right) \right) \right) / 2 \quad (4.13)
\end{aligned}$$

o parâmetro a utilizado foi $a = 0.5$.

4.2.3.3. Hellinger

$$d_H(p; q) = 1 - \exp \left(-\frac{1}{2} d_R^{1/2}(p, q) \right) \quad (4.14)$$

4.2.3.4. Bhattacharyya

$$d_B(p; q) = -\log(1 - d_H(p; q)) \quad (4.15)$$

4.3. BM3D

Block-matching and 3D filtering (BM3D) é um método de filtragem proposto por Dabov et al. (2007) que pode ser dividido em 3 passos:

1. Primeiro, fragmentos da imagem são agrupados a outros fragmentos similares formando um bloco 3D e a similaridade é definida pela distância Euclidiana para um fragmento de referência. Cada fragmento pode ser inserido em mais de um grupo.
2. Depois, cada grupo é filtrado como um bloco 3D, e após, os fragmentos são separados.
3. Por último, no processo de agregação é feita uma média ponderada entre os valores, cada vez que o fragmento foi filtrado, resultando no final a imagem filtrada.

5 Fundamentos Teóricos

De forma similar ao método proposto por Evangelista (2017), nossa abordagem consiste em alterar o Non-Local Means para filtrar sinogramas utilizando distâncias entre distribuições Gama. O diferencial é a utilização de distâncias geodésicas no espaço paramétrico entre as distribuições.

5.1. Processo de Detecção dos Feixes

Como descrito na seção 2.3, o processo de detecção dos feixes é melhor descrito por uma distribuição Poisson composta somada a uma Gaussiana.

Mas, devido à abordagem Bayesiana, esse trabalho considera que os detectores são contadores de fótons ao invés de integradores de energia, assim o processo de captação pode ser descrito por uma distribuição de Poisson em que a média corresponde ao sinal sem ruído.

5.2. Abordagem Bayesiana

Considerando um sinograma X ideal, livre de ruído e um sinograma Y dado corrompido por ruído Poisson, podemos obter um estimador de X através de uma abordagem Bayesiana.

$$Pr(X|Y) = \frac{Pr(Y|X)Pr(X)}{Pr(Y)} \quad (5.1)$$

A verossimilhança $Pr(Y|X)$ na expressão de Bayes obedece a distribuição Poisson, por representar o processo de aquisição ruidoso do sinograma. Para obter a distribuição a posteriori $Pr(X|Y)$ do estimador, seria necessário obter a expressão para $Pr(Y)$, o que em geral não é trivial. Existem métodos numéricos baseados em Markov Chain Monte Carlo ou em Métodos Variacionais (Webb & Copsey (2011); Šmídl et al. (2006)) mas que são muito custosos computacionalmente, uma vez que são aplicados para cada posição da janela de similaridade.

A alternativa é a utilização de distribuições conjugadas, que é uma propriedade que relaciona dois tipos de distribuição, se a distribuição a priori $Pr(X)$ for a conjugada da distribuição de verossimilhança $Pr(Y|X)$ então a distribuição a posteriori $Pr(X|Y)$ pertence à mesma família da distribuição a priori.

No caso da verossimilhança Poisson, sua conjugada é a distribuição Gama. Assim, se assumirmos que uma vizinhança no sinograma ideal obedece a uma distribuição Gama, então a vizinhança no sinograma estimado também irá obedecer a uma distribuição Gama.

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad (5.2)$$

A distribuição Gama pode ser descrita com parametrização α e β como na equação 5.2 ou com parametrização κ e θ onde $\kappa = \alpha$ e $\theta = \beta$.

$$f(x; \kappa, \theta) = \frac{\theta^{-\kappa} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\kappa)} \quad (5.3)$$

A adoção da Gama a priori é conveniente pois ela só é definida na semirreta não-negativa, assim como os pontos de projeção do sinograma e os hiperparâmetros, alfa e beta, que definem a distribuição a posteriori podem ser obtidos dos hiperparâmetros correspondentes da distribuição a priori.

5.2.1. Estimativa de Parâmetros

Para a parametrização α e β , os parâmetros de uma projeção a priori (sinograma ruidoso) são estimados pela média (μ) e variância (σ^2) de uma janela de tamanho 3×3 obtida de um sinograma pré-filtrado com filtro das médias de tamanho 3×3 , através do método dos momentos:

$$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \quad (5.4a)$$

$$\beta = \frac{\mu}{\sigma^2} \quad (5.4b)$$

Os parâmetros estimados $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para a distribuição a posteriori (sinograma estimado) são obtidos também através do método dos momentos.

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n y_i \quad (5.5a)$$

$$\hat{\beta} = \beta + n \quad (5.5b)$$

onde $\sum_{i=1}^n y_i$ é a soma dos valores das projeções na janela do sinograma pré-filtrado.

5.3. Distâncias Geodésicas

Distância geodésica pode ser entendida como o caminho mínimo entre dois pontos passando por uma superfície.

Uma variedade de Riemann é uma generalização de uma superfície utilizada para cálculo de distâncias geodésicas. Onde se define uma norma no espaço tangencial que é métrica para a distância utilizada.

A partir da topologia e da norma se definem tensores métricos g_{ij} para cada combinação de duas dimensões e com esses tensores se pode calcular a distância geodésica da seguinte forma:

$$d(\theta_a, \theta_b) = \left| \int_{\theta_a}^{\theta_b} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_{ij}(\theta) d\theta_i d\theta_j \right]^{\frac{1}{2}} \right| \quad (5.6)$$

Rao (1945) descreveu um espaço paramétrico de uma mesma família de distribuições de probabilidades como uma variedade de Riemann, derivando distâncias geodésicas a partir da divergência de Kullback Leiber. Essas distâncias poderiam então ser usadas como métricas de similaridades entre duas distribuições distintas pertencentes a uma mesma família de probabilidade.

Tabela 5.1. (h, ϕ) -entropies and their respective $h(x)$, $\phi(x)$ functions

(h, ϕ) -entropy	$h(x)$	$\phi(x)$
Arimoto	$(x^s - 1)/(s - 1)$	$x^{\frac{1}{s}}, s > 0, s \neq 1$
Havrda-Charvát	x	$(x^s - x)/(s - 1), s > 0, s \neq 1$
Rényi	$\log(x)/(s - 1)$	$x^s, s > 0, s \neq 1$
Shannon	x	$-x \log(x)$
Tsallis	$(x - 1)/(s - 1)$	$x^s, s > 0, s \neq 1$

Menéndez et al. (1997) propuseram um método geral para gerar distâncias geodésicas para (h, ϕ) -entropias, introduzidas por Salicrú et al. (1993). A variedade para o espaço paramétrico onde será calculada a distância geodésica é a entropia associada à distribuição de probabilidade f_P e é dada por:

$$H_{\phi}^h = h \left[\int_I \phi(f_P(x; \theta)) dx \right] \quad (5.7)$$

Nessa abordagem se utiliza a Hessiana da entropia no espaço tangente como métrica de distância. Dessa forma os tensores g_{ij} são descritos como:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}(\theta) = & \\
 & h'' \left[\int_I \phi(f_P(x; \theta)) dx \right] \int_I \phi'(f_P(x; \theta)) \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_i} dx \\
 & \times \int_I \phi'(f_P(x; \theta)) \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_j} dx + h' \left[\int_I \phi(f_P(x; \theta)) dx \right] \\
 & \times \int_I \phi''(f_P(x; \theta)) \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_j} dx
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

sendo θ_a e θ_b os vetores de parâmetros, $f_P(x; \theta)$ a função de densidade de probabilidade e I seu intervalo de suporte, $(0, \infty)$ para o caso das distribuições Gama.

Nesse trabalho são utilizadas as (h, ϕ) -entropias descritas na tabela 5.1. Na figura 5.1 está plotada a entropia H_ϕ^h de Arimoto associada à distribuição Gama com $s = 1.1$.

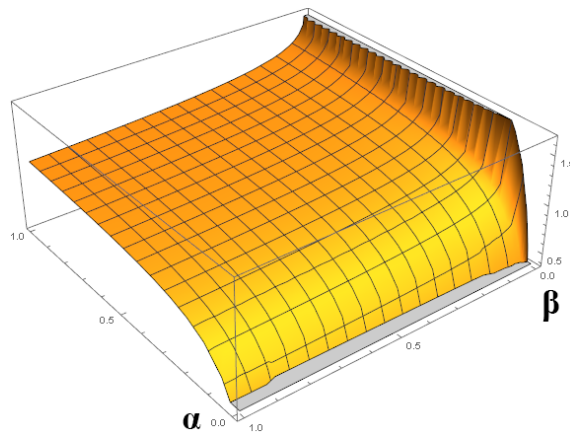


Figura 5.1. Entropia H_ϕ^h Arimoto associada a Gama.

Para a distribuição Gama só foi possível achar uma fórmula fechada para a distância geodésica derivada da entropia de Shannon. Para as demais foi possível calcular os termos g_{ij} , então foi utilizada integração numérica para calcular a distância $d(\theta_a, \theta_b)$.

Distância de Shannon para Distribuição Gama:

$$d(\theta_1, \theta_2) = \left| (\beta_1 - 2\alpha_1 \log(\beta_1) - \beta_1 \log(\beta_1) + \log \Gamma(\alpha_1))^{\frac{1}{2}} - (\beta_2 - 2\alpha_2 \log(\beta_2) - \beta_2 \log(\beta_2) + \log \Gamma(\alpha_2))^{\frac{1}{2}} \right| \quad (5.9)$$

Para a entropia de Tsallis os resultados finais das distâncias calculadas de forma numérica foram equivalentes ao obtidos pela entropia Havrda-Charvát, apesar dos valores dos tensores g_{ij} distintos. Observando os trabalhos Santos (2017) e Santos & Mascarenhas (2019), ao comparar distâncias geodésicas para as distribuições Rayleigh e Fisher-Tippett, as fórmulas de distâncias encontradas para ambas entropias são iguais.

6 Método de Filtragem Geodésico

O filtro para redução de ruído Poisson em sinogramas proposto se baseia na abordagem de Evangelista (2017). No nosso método, o NLM é modificado para utilização de distâncias geodésicas entre distribuições Gama, onde os parâmetros são estimados para a distribuição a posteriori pela abordagem Bayesiana.

As distâncias geodésicas para a distribuição Gama utilizando as entropias Shannon, Arimoto, Havrda-Charvát, e Rényi são calculadas com base no método proposto em Menéndez et al. (1997).

O método possui como entrada os tamanhos da janela de busca e da janela de similaridade, e o parâmetro h que controla a intensidade do filtro. A filtragem do sinograma se dá da seguinte forma:

- Inicialmente são calculados os valores estimados para os parâmetros α e β da distribuição posteriori. Como descrito na seção 5.2.1, para o cálculo dos parâmetros, o sinograma é filtrado com um filtro das médias com janela de tamanho 3×3 , e os valores de média e variância são calculados também em uma janela de tamanho 3×3 . Esses parâmetros são então normalizados.
- Caso a entropia utilizada seja Arimoto, Havrda-Charvát ou Rényi, o cálculo das distâncias geodésicas se dá de forma numérica, assim a tabela correspondente é carregada em memória, seção 6.1.
- O sinograma é então filtrado com o NLM modificado.
 - As distâncias geodésicas são calculadas para cada pixel da janela de similaridade.
 - A distância entre dois *patches* é a soma das distâncias geodésicas.

6.1. Cálculo das Distâncias Geodésicas Numéricas

Para o cálculo das distâncias geodésicas de forma numérica são geradas três tabelas, para $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$, e $g_{\beta\beta}$. Os valores são avaliados em escala logarítmica de base 2 para ambas dimensões do espaço paramétrico. Para o parâmetro α os valores variam de $2^{-11,2}$ até 2^0 , em passos de $2^{0,005}$. Para o parâmetro β os valores variam de 2^{-7} até 2^0 , em passos de $2^{0,0028}$.

Para se obter a tabela $G_{\alpha\alpha}$ integra-se a tabela dos valores $g_{\alpha\alpha}$ duas vezes em α . Para a tabela $G_{\alpha\beta}$, os valores de $g_{\alpha\beta}$ são integrados em ambas coordenadas. A tabela $G_{\beta\beta}$ é obtida pela integração dos valores $g_{\beta\beta}$ integrados duas vezes em β .

Para obter a tabela final para o cálculo da distância as três tabelas são somadas, $G_{\alpha\beta}$ sendo somada duas vezes. Para cada valor resultante é calculada a raiz quadrada.

$$G[\alpha, \beta] = \left(G_{\alpha\alpha}[\alpha, \beta] + 2 \times G_{\alpha\beta}[\alpha, \beta] + G_{\beta\beta}[\alpha, \beta] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

As fórmulas para os tensores $g_{\alpha\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$, e $g_{\beta\beta}$ para as entropias Arimoto, Havrda-Charvát, e Rényi encontram-se no Anexo 9.1.

6.2. Processo de Filtragem

Inicia-se o processo de filtragem calculando os parâmetros pré-estimados como descritos em 5.5. Esses parâmetros são então normalizados para valores entre 0 e 1.

Para as distâncias de Arimoto, Havrda-Charvát, e Rényi as tabelas $G[\alpha, \beta]$ são carregadas em memória.

Para a comparação entre janelas de similaridade do NLM, a distância geodésica é calculada para cada pixel da janela, e a distância entre as duas janelas é dada pelo somatório dessas distâncias. O peso w_{ij} usado no cálculo do NLM é dado pela seguinte equação.

$$w_{ij} = \exp\left(\frac{-\sum_P d(\theta_{i-p}, \theta_{j-p})}{h^2}\right) \quad (6.2)$$

Para a entropia de Shannon, a distância entre dois pixels é dada pela fórmula 5.9. Para as demais entropias, a distância é calculada pela diferença entre os valores da tabela $G[\alpha, \beta]$ avaliados nas células mais próximas aos parâmetros de cada um dos dois pixels.

$$d(\theta_i, \theta_j) = G[\alpha_i, \beta_i] - G[\alpha_j, \beta_j] \quad (6.3)$$

7 Método de Avaliação de Resultados

Para avaliar os resultados de um método ao filtrar um phantom real, os dados de projeções são transformados em integrais de linha (equação 2.2) para serem então reconstruídos.

$$\lambda'_i = \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_i}\right) \quad (7.1)$$

No phantom simulado de Shepp-Logan não se aplica o logaritmo pois as projeções são obtidas diretamente da transformada de Radon, sem atenuação exponencial.

A imagem obtida é avaliada em relação à imagem reconstruída do sinograma sem ruído e os resultados são comparados com os obtidos com os da imagem reconstruída ruidosa e com os demais métodos descritos no capítulo 4. As métricas utilizadas para comparação são descritas na seção 7.4.

7.1. Conjunto de Testes

O conjunto de teste utilizado nesse trabalho é composto pelo *phantom* de Shepp-Logan (simulando um corte do cérebro humano) assim como cinco sinogramas de *phantoms* reais gentilmente cedidos pelo Prof. Dr. Paulo Estevão Cruvinel da EMBRAPA-CNPDIÁ.

Os sinogramas ruidosos foram obtidos através de exposição de 3 segundos por ponto de projeção, enquanto que os *phantoms* considerados livres de ruído foram obtidos com exposição de 20 segundos por ponto de projeção.

A energia do raio-X utilizada foi de $59,5keV$, o escaneamento tomográfico foi realizado em uma rotação angular de 180° com um passo de $1mm$.

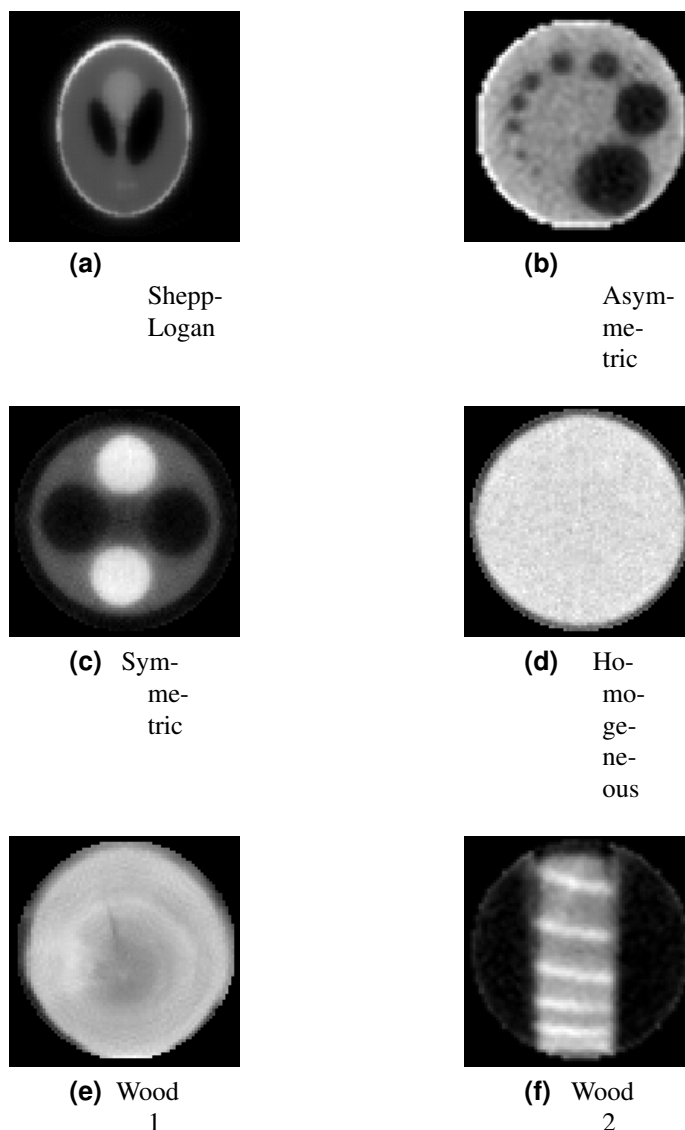


Figura 7.1. Imagens de referência livres de ruído reconstruídas com POCS

Shepp-Logan

O sinograma ruidoso de Shepp-Logan foi simulado ao calcular a transformada de Radon na imagem e introduzido ruído Poisson nas projeções. O sinograma é construído ao se aplicar a transformada de Radon sobre a imagem original. Aplicando a Transformada Inversa de Radon para obter a imagem reconstruída, a equação 7.1 é modificada para não utilizar a operação logarítmica .

$$\lambda'_i = \frac{\lambda_0}{\lambda_i} \quad (7.2)$$

Assimétrico

O phantom real Assimétrico foi obtido por um cilindro de PEXIGLASS® de $96mm$ de diâmetro com 10 buracos preenchidos com ar, com tamanhos variando de $0.5mm$ a $5mm$. A matriz de projeções possui tamanho 100×100 .

Simétrico

O phantom Simétrico foi obtido por um cilindro de pexiglass de $76mm$ de diâmetro com 4 buracos, 2 preenchidos com alumínio e 2 com ar. A matriz de projeções possui tamanho 80×80 .

Homogêneo

O phantom Homogêneo foi obtido por um cilindro de pexiglass de $76mm$ de diâmetro e $2mm$ de espessura cheio de água. A matriz de projeções possui tamanho 80×80 .

Madeira 1

O phantom Madeira 1 foi obtido pelo escaneamento de um tronco de *Eucalyptus Saligna* de $70mm$ de diâmetro. A matriz de projeções possui tamanho 76×76 .

Madeira 2

O phantom Madeira 2 foi obtido pelo escaneamento de um tronco de *Pinus Elliotii* de formato cúbico de tamanho $50mm \times 50mm \times 50mm$. A matriz de projeções possui tamanho 62×62 .

7.2. Métodos Avaliados

Nesse trabalho avaliamos os métodos de filtragem utilizando o NLM geodésico para as seguintes entropias:

1. Shannon, é feita a comparação com a fórmula fechada para a distância.
2. Arimoto, é feita a comparação a partir da tabela gerada para essa entropia avaliada com o parâmetro $s = 1.1$.
3. Havrda-Charvát, é feita a comparação numérica com o parâmetro $s = 0.8$.
4. Rényi, é feita a comparação numérica com o parâmetro $s = 0.1$.

Comparamos o método proposto com o NLM original mas aplicado no domínio Anscombe, o método Poisson-NLM, o método SP-NLM para as distâncias descritas no capítulo 4, o método NLM estocástico também para as quatro distâncias descritas, e o método BM3D aplicado no domínio Anscombe.

7.3. Parâmetros Considerados na reconstrução

Para avaliar os métodos baseados em NLM, filtrações foram feitas variando o tamanho das janelas de busca, janelas de similaridade, e do parâmetro h . Os métodos Stochastic Poisson NLM calcula o parâmetro h de forma automática, assim só foi utilizado o valor calculado pelo próprio método. Enquanto que o método BM3D não depende desses parâmetros.

Foram consideradas janelas de busca de tamanho 5×5 até 11×11 . Para janelas de similaridade foram consideradas janelas de tamanho 5×5 até o tamanho da janela de busca sendo utilizado.

O parâmetro h foi variado entre 0.1 e 0.5. Com exceção dos phantoms homogêneo e Shepp-Logan que variaram entre 0.2 e 0.6.

7.4. Métricas

Com a imagem reconstruída do sinograma filtrado, ela é comparada com uma imagem reconstruída a partir do sinograma de referência, sem ruído, utilizando duas métricas de similaridade PSNR e SSIM.

Essa comparação também é feita para a imagem reconstruída do sinograma ruidoso não filtrado sendo usada como um ponto de referência.

Os valores obtidos nessas métricas variam consideravelmente entre cada caso de teste. Assim os resultados devem ser considerados com base na melhora em relação à imagem ruidosa ou aos resultados obtidos por outros métodos.

7.4.1. Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)

Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR) é um índice de similaridade que compara a potência máxima que o sinal pode assumir (MAX_Y) e o erro médio quadrático entre as duas imagens sendo comparadas.

Os valores são apresentados em dB, e à medida que as imagens se assemelham o valor da métrica tende ao infinito positivo.

$$PSNR(Y, X) = 10 \log_{10} \left(\frac{MAX_Y^2}{MSE(Y, X)} \right) \quad (7.3)$$

onde X e Y são as duas imagens sendo comparadas e o erro quadrático é dado por:

$$MSE(Y, X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2 \quad (7.4)$$

x_i e y_i são os pixels das imagens X e Y , respectivamente, na posição i , e N é o total de pixels da imagem.

7.4.2. Structural Similarity Index (SSIM)

Desenvolvido por Wang et al. (2004), Structural Similarity Index (SSIM) é outro índice de similaridade que procura simular o sistema visual humano, levando em conta a comparação das imagens em três critérios, luminância, contraste e estrutura.

A comparação é feita entre várias janelas das imagens. Os valores dessa métrica variam entre 0 e 1, sendo maior a medida que as imagens se assemelham, sendo 1 para imagens idênticas.

$$SSIM(Y, X) = L(Y, X)^\alpha \cdot C(Y, X)^\beta \cdot S(Y, X)^\gamma \quad (7.5)$$

onde $L(Y, X)$ é a comparação de luminância, $C(Y, X)$ é a comparação de contraste e $S(Y, X)$ comparação de estrutura. α , β e γ são parâmetros estritamente positivos que

controlam a importância de cada critério.

$$L(Y, X) = \left(\frac{2\mu_y 2\mu_x + C_1}{\mu_y^2 + \mu_x^2 + C_1} \right) \quad (7.6a)$$

$$C(Y, X) = \left(\frac{2\sigma_y 2\sigma_x + C_2}{\sigma_y^2 + \sigma_x^2 + C_2} \right) \quad (7.6b)$$

$$S(Y, X) = \left(\frac{\sigma_{y,x} + C_3}{\sigma_y \sigma_x + C_3} \right) \quad (7.6c)$$

onde μ_y e μ_x são as médias das janelas de Y e X respectivamente, σ_y^2 e σ_x^2 suas respectivas variâncias e $\sigma_{y,x}$ a covariância entre as janelas. Os valores das constantes são os recomendados por Wang et al. (2004).

$$\alpha = \beta = \gamma = 1,$$

$$C_1 = (K_1 L)^2, C_2 = (K_2 L)^2, C_3 = C_2/2,$$

$$K_1 = 0,001 e K_2 = 0,003.$$

onde L é o maior valor que Y pode assumir.

8 Resultados

Nesse capítulo são expostos os melhores resultados obtidos pelos métodos avaliados para os seis phantoms do conjunto de teste.

Os parâmetros, tamanho da janela de busca, tamanho da janela de similaridade e parâmetro de intensidade do filtro h utilizados para obter esses resultados são indicados.

O método SP-NLM não tem como entrada o parâmetro de intensidade h , pois esse é calculado de forma automática. O método BM3D não é um método baseado em NLM e não possui os parâmetros de entrada especificados.

Nas tabelas apresentadas para cada phantom, em cada uma das quatro métricas, os melhores resultados obtidos são apresentados em **negrito** e os segundos melhores em sublinhado.

8.1. Resultados Shepp-Logan

Tabela 8.1. Resultados Shepp-Logan

Métodos	Busca	Similaridade	h	FBP		POCS	
				PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Ruidoso				14.51	0.25	20.22	0.62
Shannon	9×9	5×5	0.55	20.98	0.76	20.74	<u>0.89</u>
Shannon	11×11	11×11	0.60	20.45	0.72	22.11	0.88
Arimoto $s = 1.1$	11×11	9×9	0.65	<u>21.14</u>	0.81	20.46	0.90
Arimoto $s = 1.1$	11×11	11×11	0.35	20.40	0.72	22.14	0.88
Havrda Charvát $s = 0.8$	9×9	5×5	0.60	21.09	0.77	20.76	<u>0.89</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	15×15	9×9	0.60	20.43	<u>0.80</u>	21.68	0.90
Rényi $s = 0.1$	9×9	5×5	0.60	21.07	0.77	20.81	<u>0.89</u>
Rényi $s = 0.1$	15×15	9×9	0.60	20.46	<u>0.80</u>	21.67	0.90
NLM	15×15	11×11	0.60	20.36	0.61	21.69	0.86
NLM	7×7	7×7	0.60	19.40	0.49	21.86	0.81
P-NLM	13×13	11×11	0.40	21.20	0.72	20.86	0.88
P-NLM	9×9	5×5	0.20	19.02	0.50	21.77	0.82
SP-NLM Bhattacharyya	15×15	7×7		18.57	0.69	17.70	0.81
SP-NLM Bhattacharyya	7×7	7×7		17.28	0.70	18.11	0.85
SP-NLM Hellinger	15×15	7×7		18.71	0.72	17.67	0.83
SP-NLM Hellinger	7×7	5×5		17.09	0.69	18.00	0.85
SP-NLM KL	15×15	7×7		18.84	0.73	17.64	0.84
SP-NLM KL	7×7	7×7		17.82	0.71	18.33	0.86
SP-NLM Rényi	15×15	7×7		18.68	0.70	17.69	0.82
SP-NLM Rényi	7×7	5×5		17.55	0.71	18.16	0.85
G-NLM Bhattacharyya	11×11	11×11	0.30	20.07	0.72	22.20	<u>0.89</u>
G-NLM Bhattacharyya	11×11	11×11	0.60	20.02	0.77	21.76	0.90
G-NLM Hellinger	11×11	9×9	0.65	20.92	<u>0.80</u>	20.51	<u>0.89</u>
G-NLM Hellinger	11×11	11×11	0.60	20.10	0.78	21.63	0.90
G-NLM KL	9×9	5×5	0.55	20.97	0.76	20.87	<u>0.89</u>
G-NLM Rényi	11×11	11×11	0.50	20.10	0.73	<u>22.19</u>	<u>0.89</u>
G-NLM Rényi	11×11	9×9	0.60	20.62	0.78	21.49	0.90
BM3D				21.00	0.81	21.30	<u>0.89</u>

Na métrica PSNR com reconstrução FBP o melhor resultado foi o P-NLM de Deledalle et al. (2010) o segundo melhor foi o método proposto para entropia de Arimoto.

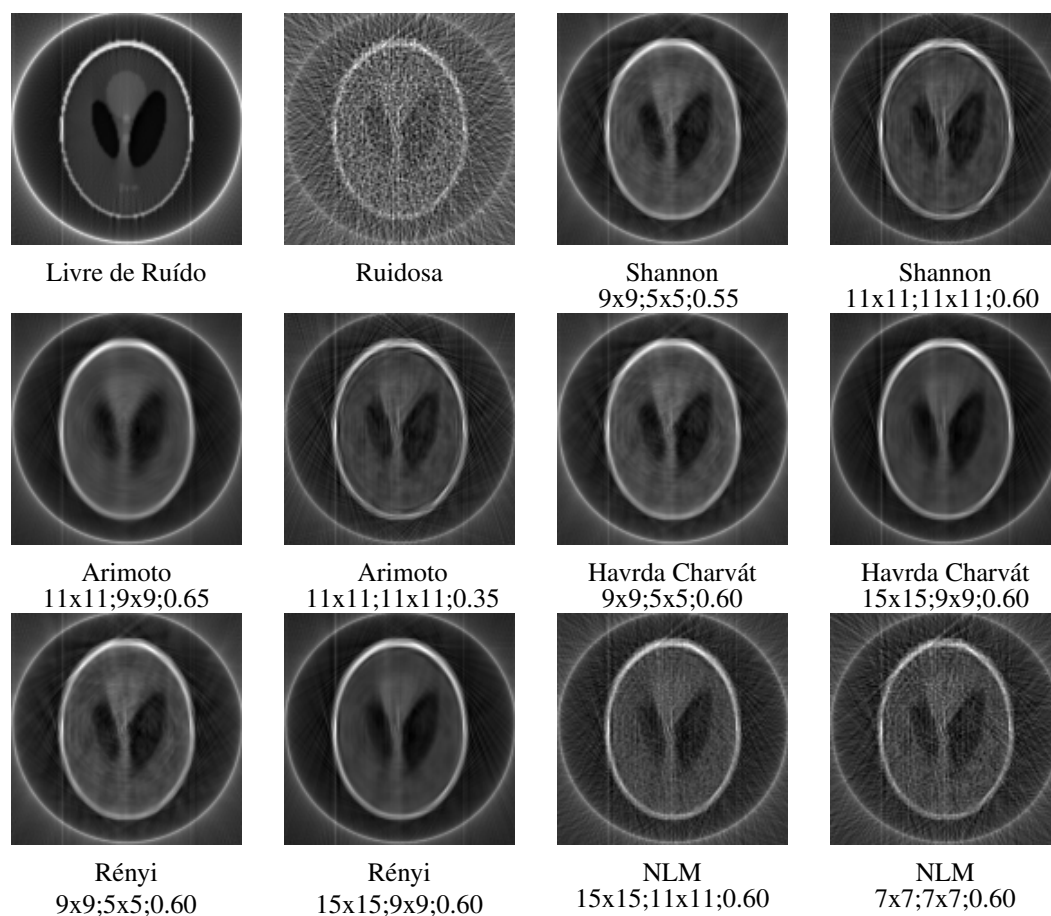
Na métrica PSNR com reconstrução POCS os melhores resultados foram os obtidos pelo método de Evangelista (2017).

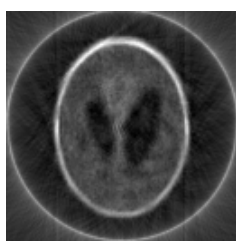
Nas métricas SSIM, para ambas reconstruções, o método proposto, o método de Evangelista e o BM3D obtiveram os melhores resultados.

Avaliando o método proposto, considerando os melhores resultados de cada uma das entropias utilizadas, o método que obteve o pior resultado PSNR para FBP foi Shannon com 20,98 dB, que difere em apenas 0,22dB do melhor resultado obtido global.

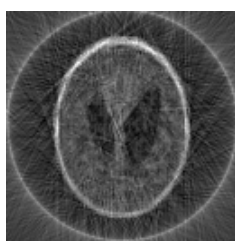
Para PSNR com reconstrução POCS, Rényi obteve 21,67dB, que difere do melhor resultado em 0,53dB.

Figura 8.1. Imagens dos resultados Shepp-Logan para reconstrução FBP

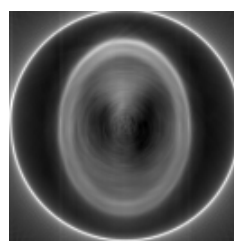




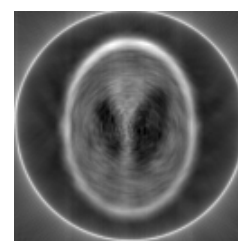
P-NLM
13x13;11x11;0.4



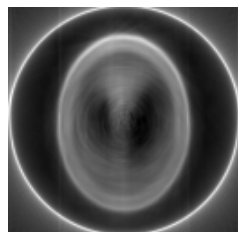
P-NLM
9x9;5x5;0.20



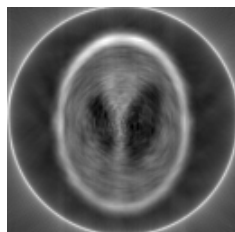
SP-NLM Bhattacharyya
15x15;7x7



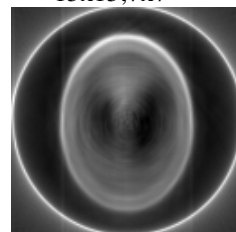
SP-NLM Bhattacharyya
7x7;7x7



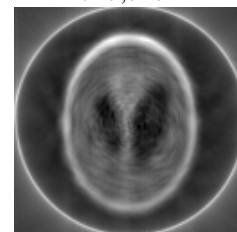
SP-NLM Hellinger
15x15;7x7



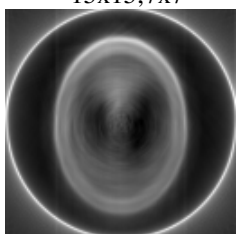
SP-NLM Hellinger
7x7;5x5



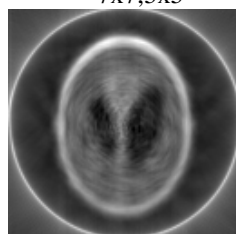
SP-NLM KL
15x15;7x7



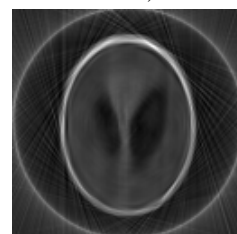
SP-NLM KL
7x7;7x7



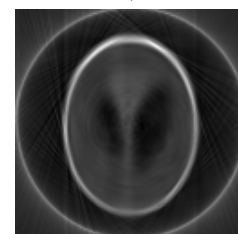
SP-NLM Rényi
15x15;7x7



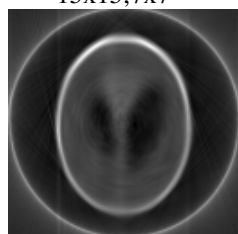
SP-NLM Rényi
7x7;5x5



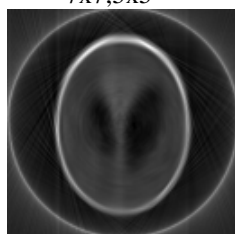
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.30



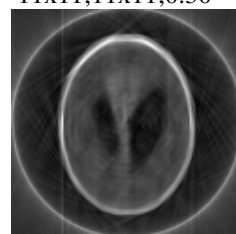
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.60



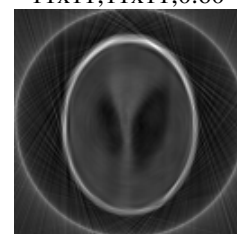
G-NLM Hellinger
11x11;9x9;0.65



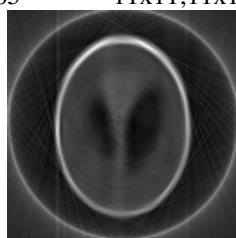
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.60



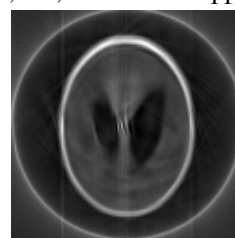
G-NLM KL
9x9;5x5;0.55



G-NLM Rényi
11x11;11x11;0.50

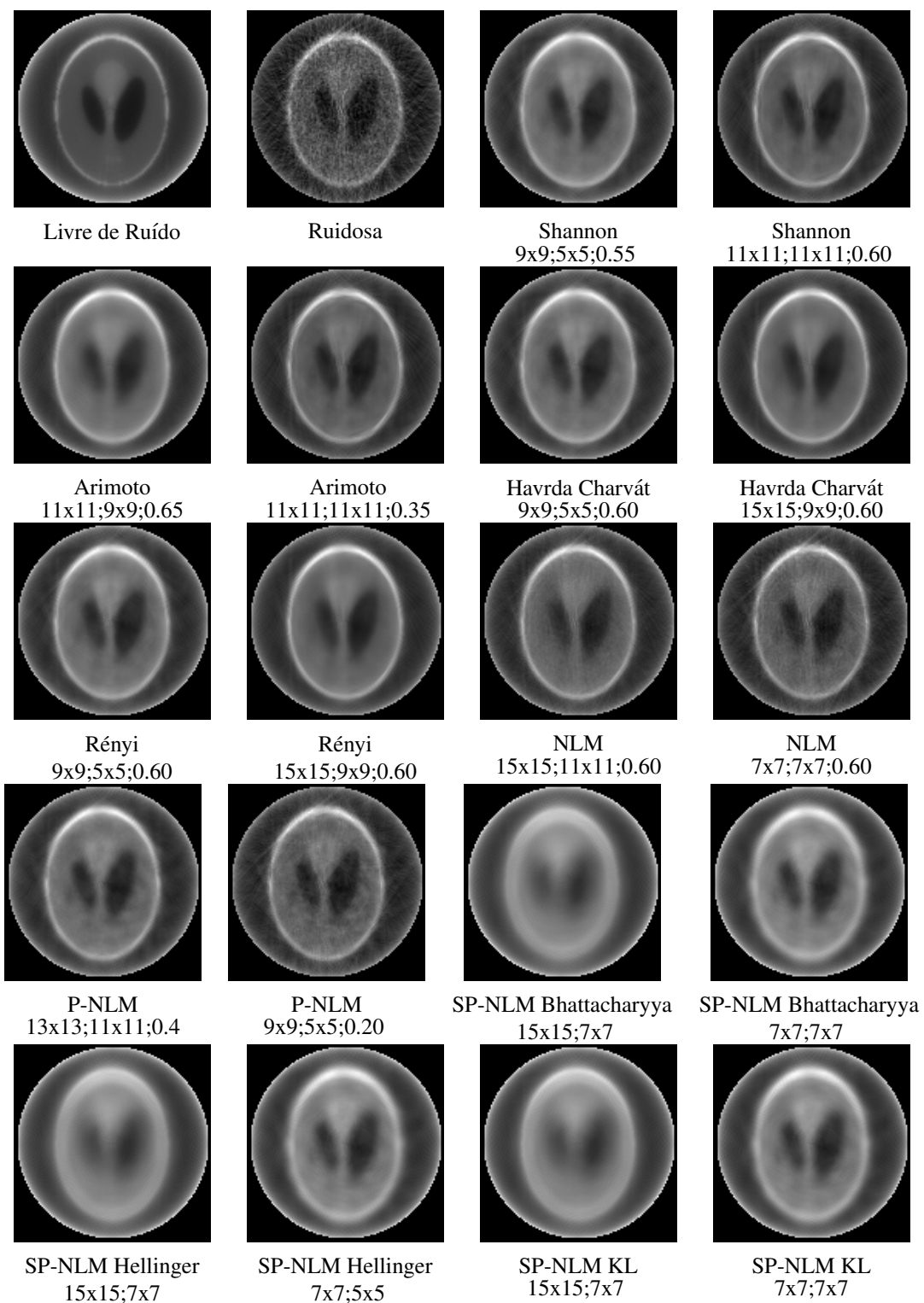


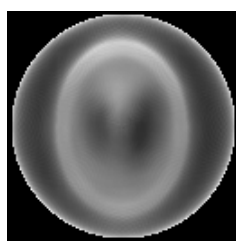
G-NLM Rényi
11x11;9x9;0.60



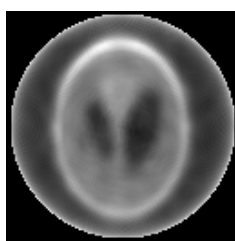
BM3D

Figura 8.2. Imagens dos resultados Shepp-Logan para reconstrução POCS

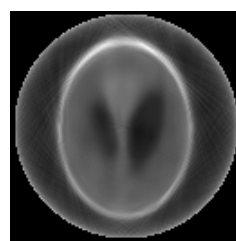




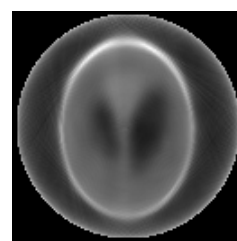
SP-NLM Rényi
15x15;7x7



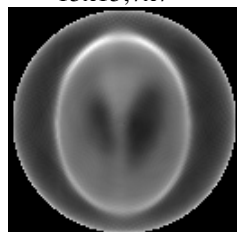
SP-NLM Rényi
7x7;5x5



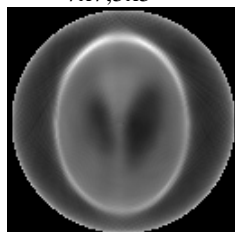
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.30



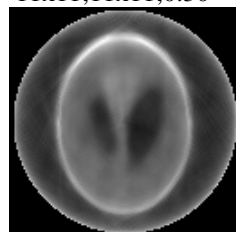
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.60



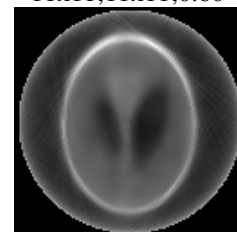
G-NLM Hellinger
11x11;9x9;0.65



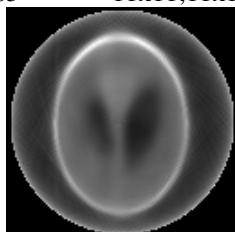
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.60



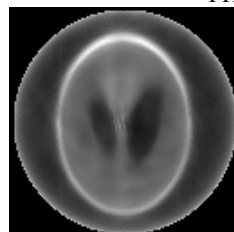
G-NLM KL
9x9;5x5;0.55



G-NLM Rényi
11x11;11x11;0.50



G-NLM Rényi
11x11;9x9;0.60



BM3D

8.2. Resultados Assimétrico

Tabela 8.2. Resultados Assimétrico

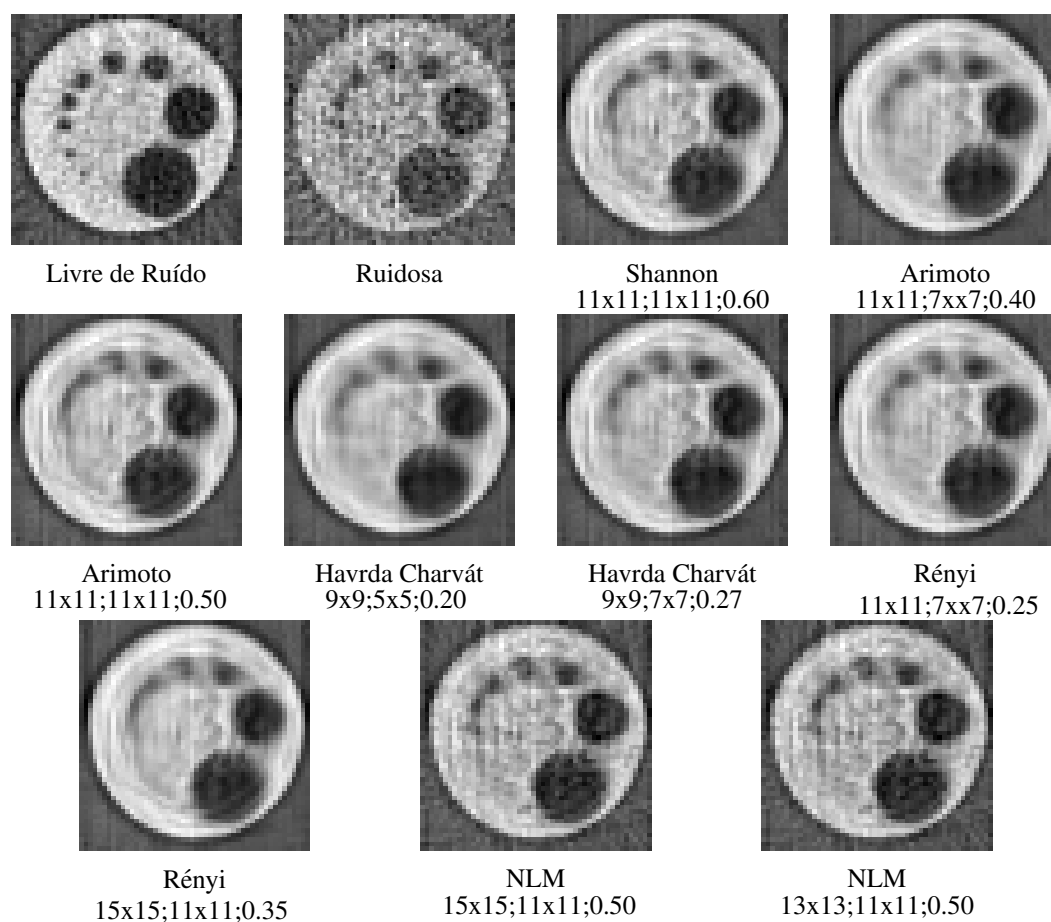
Métodos	Busca	Similaridade	h	FBP		POCS	
				PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Ruidoso				16.52	0.52	24.27	0.85
Shannon	11 × 11	11 × 11	0.60	20.89	0.69	28.85	<u>0.91</u>
Arimoto $s = 1.1$	11 × 11	7 × 7	0.40	21.18	<u>0.70</u>	28.93	<u>0.91</u>
Arimoto $s = 1.1$	11 × 11	11 × 11	0.50	21.04	<u>0.70</u>	29.11	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	9 × 9	5 × 5	0.20	21.24	<u>0.70</u>	29.04	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	9 × 9	7 × 7	0.25	21.19	<u>0.70</u>	<u>29.15</u>	<u>0.91</u>
Rényi $s = 0.1$	11 × 11	7 × 7	0.25	21.16	<u>0.70</u>	29.00	<u>0.91</u>
Rényi $s = 0.1$	15 × 15	11 × 11	0.35	21.03	<u>0.70</u>	<u>29.15</u>	<u>0.91</u>
NLM	15 × 15	11 × 11	0.50	20.10	0.67	26.87	0.90
NLM	13 × 13	11 × 11	0.50	19.94	0.67	26.91	0.90
P-NLM	13 × 13	5 × 5	0.40	20.81	0.68	28.46	0.90
P-NLM	9 × 9	9 × 9	0.50	20.47	0.65	28.85	0.90
SP-NLM Bhattacharyya	7 × 7	5 × 5		20.17	0.65	26.53	0.89
SP-NLM Hellinger	7 × 7	5 × 5		18.78	0.62	23.92	0.88
SP-NLM KL	9 × 9	9 × 9		20.96	0.68	28.64	<u>0.91</u>
SP-NLM KL	13 × 13	11 × 11		20.78	0.69	28.72	<u>0.91</u>
SP-NLM Rényi	9 × 9	9 × 9		20.77	0.67	28.21	0.90
SP-NLM Rényi	7 × 7	7 × 7		20.72	0.67	28.32	0.90
G-NLM Bhattacharyya	15 × 15	9 × 9	0.15	21.24	<u>0.70</u>	29.06	<u>0.91</u>
G-NLM Bhattacharyya	13 × 13	11 × 11	0.20	21.13	<u>0.70</u>	29.11	<u>0.91</u>
G-NLM Hellinger	15 × 15	9 × 9	0.15	21.24	<u>0.70</u>	29.06	<u>0.91</u>
G-NLM Hellinger	13 × 13	11 × 11	0.20	21.13	<u>0.70</u>	29.11	<u>0.91</u>
G-NLM KL	15 × 15	11 × 11	0.40	21.14	<u>0.70</u>	29.07	<u>0.91</u>
G-NLM Rényi	15 × 15	9 × 9	0.20	<u>21.26</u>	<u>0.70</u>	29.04	<u>0.91</u>
G-NLM Rényi	11 × 11	11 × 11	0.25	21.14	<u>0.70</u>	29.14	<u>0.91</u>
BM3D				21.46	0.72	29.67	0.92

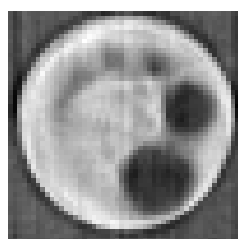
Para o phantom Assimétrico o método BM3D foi o que obteve os melhores resultados em todas as métricas.

O método proposto obteve resultados semelhantes aos de Evangelista. Os resultados obtidos por esses dois métodos foram inferiores a apenas o BM3D.

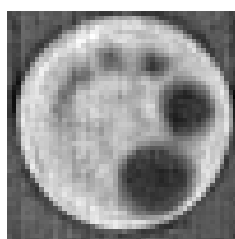
Nesse phantom o método SP-NLM obtém valores de SSIM na reconstrução POCS comparável aos demais métodos baseados em NLM, sendo inferior nas demais métricas.

Figura 8.3. Imagens dos resultados do phantom Assimétrico para reconstrução FBP

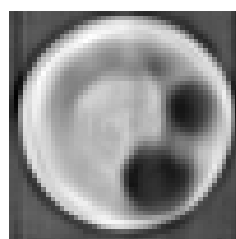




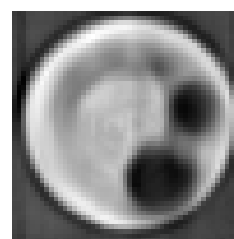
P-NLM
13x13;5x5;0.40



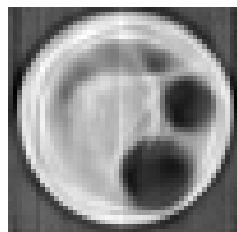
P-NLM
9x9;9x9;0.50



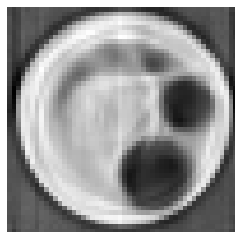
SP-NLM Bhattacharyya
7x7;5x5



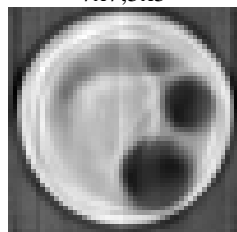
SP-NLM Hellinger
7x7;5x5



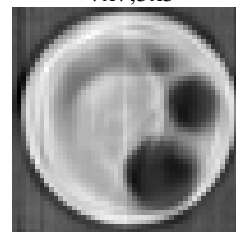
SP-NLM KL
9x9;9x9



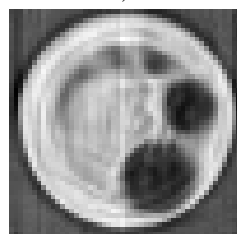
SP-NLM KL
13x13;11x11



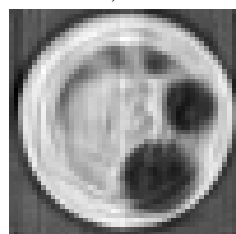
SP-NLM Rényi
9x9;9x9



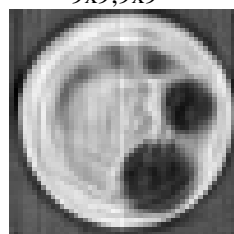
SP-NLM Rényi
7x7;7x7



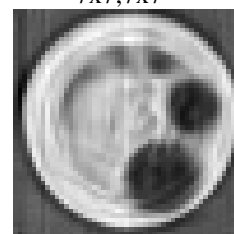
G-NLM Bhattacharyya
15x15;9x9;0.15



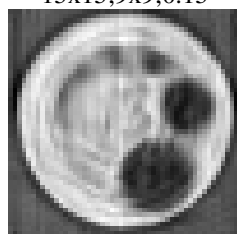
G-NLM Bhattacharyya
13x13;11x11;0.20



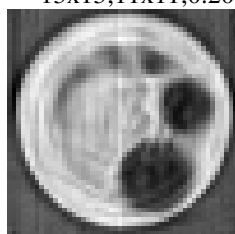
G-NLM Hellinger
15x15;9x9;0.15



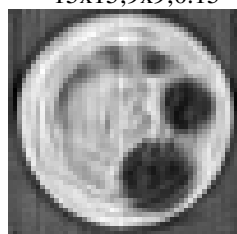
G-NLM Hellinger
13x13;11x11;0.20



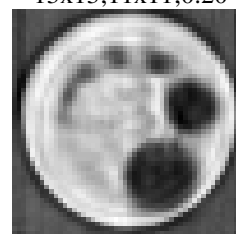
G-NLM KL
15x15;11x11;0.40



G-NLM Rényi
15x15;9x9;0.20

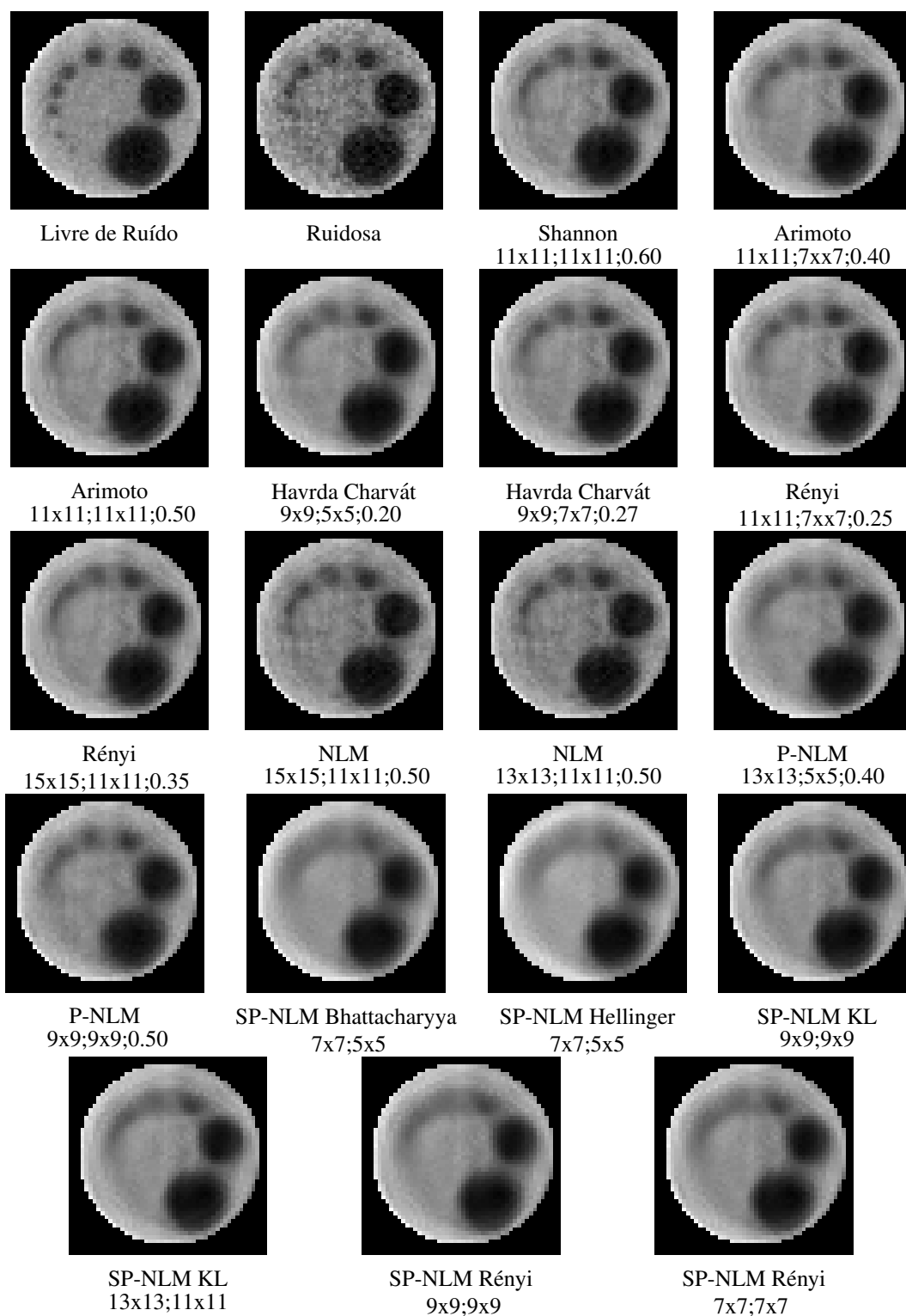


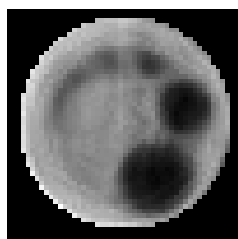
G-NLM Rényi
11x11;11x11;0.25



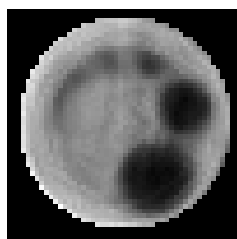
BM3D

Figura 8.4. Imagens dos resultados do phantom Assimétrico para reconstrução POCS

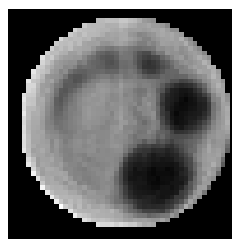




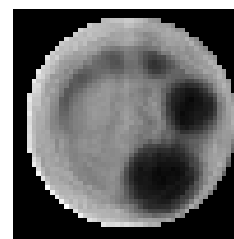
G-NLM Bhattacharyya
15x15;9x9;0.15



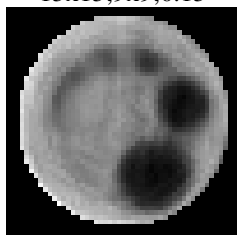
G-NLM Bhattacharyya
13x13;11x11;0.20



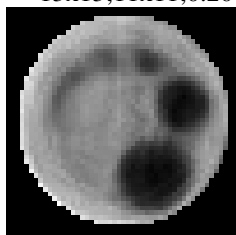
G-NLM Hellinger
15x15;9x9;0.15



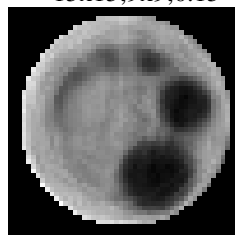
G-NLM Hellinger
13x13;11x11;0.20



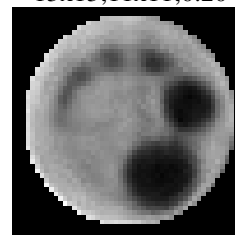
G-NLM KL
15x15;11x11;0.40



G-NLM Rényi
15x15;9x9;0.20



G-NLM Rényi
11x11;11x11;0.25



BM3D

8.3. Resultados Simétrico

Tabela 8.3. Resultados Simétrico

Métodos	Busca	Similaridade	h	FBP		POCS	
				PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Ruidoso				20.54	0.45	27.51	0.80
Shannon	9×9	5×5	0.40	<u>27.88</u>	0.72	34.00	0.95
Shannon	11×11	11×11	0.60	27.20	0.69	34.42	0.95
Arimoto $s = 1.1$	9×9	5×5	0.35	27.81	<u>0.71</u>	33.91	0.95
Arimoto $s = 1.1$	15×15	7×7	0.50	27.45	0.72	33.68	<u>0.94</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	9×9	5×5	0.25	27.70	<u>0.71</u>	33.27	0.92
Havrda Charvát $s = 0.8$	5×5	5×5	0.20	27.02	0.69	34.42	<u>0.94</u>
Rényi $s = 0.1$	9×9	5×5	0.25	27.77	0.72	33.91	0.95
Rényi $s = 0.1$	5×5	5×5	0.20	27.20	0.69	34.50	0.95
NLM	13×13	11×11	0.50	26.27	0.63	33.35	0.93
P-NLM	13×13	5×5	0.55	28.00	0.72	33.80	0.95
P-NLM	13×13	11×11	0.30	27.56	<u>0.71</u>	34.57	0.95
SP-NLM Bhattacharyya	7×7	5×5		25.17	0.66	31.09	0.91
SP-NLM Hellinger	7×7	5×5		25.27	0.67	32.37	0.92
SP-NLM KL	7×7	5×5		24.90	0.65	30.89	0.91
SP-NLM Rényi	7×7	7×7		24.83	0.65	31.13	0.91
G-NLM Bhattacharyya	11×11	7×7	0.25	27.42	0.72	33.93	0.95
G-NLM Bhattacharyya	11×11	11×11	0.20	27.52	0.70	34.42	0.95
G-NLM Hellinger	9×9	5×5	0.15	27.81	<u>0.71</u>	34.02	0.95
G-NLM Hellinger	11×11	11×11	0.20	27.51	0.70	<u>34.43</u>	0.95
G-NLM KL	15×15	11×11	0.50	27.70	0.72	33.20	0.95
G-NLM KL	7×7	5×5	0.40	26.88	0.70	33.99	0.95
G-NLM Rényi	9×9	5×5	0.20	27.78	<u>0.71</u>	33.95	0.95
G-NLM Rényi	11×11	11×11	0.30	27.55	<u>0.71</u>	34.35	0.95
BM3D				27.34	0.72	33.27	0.95

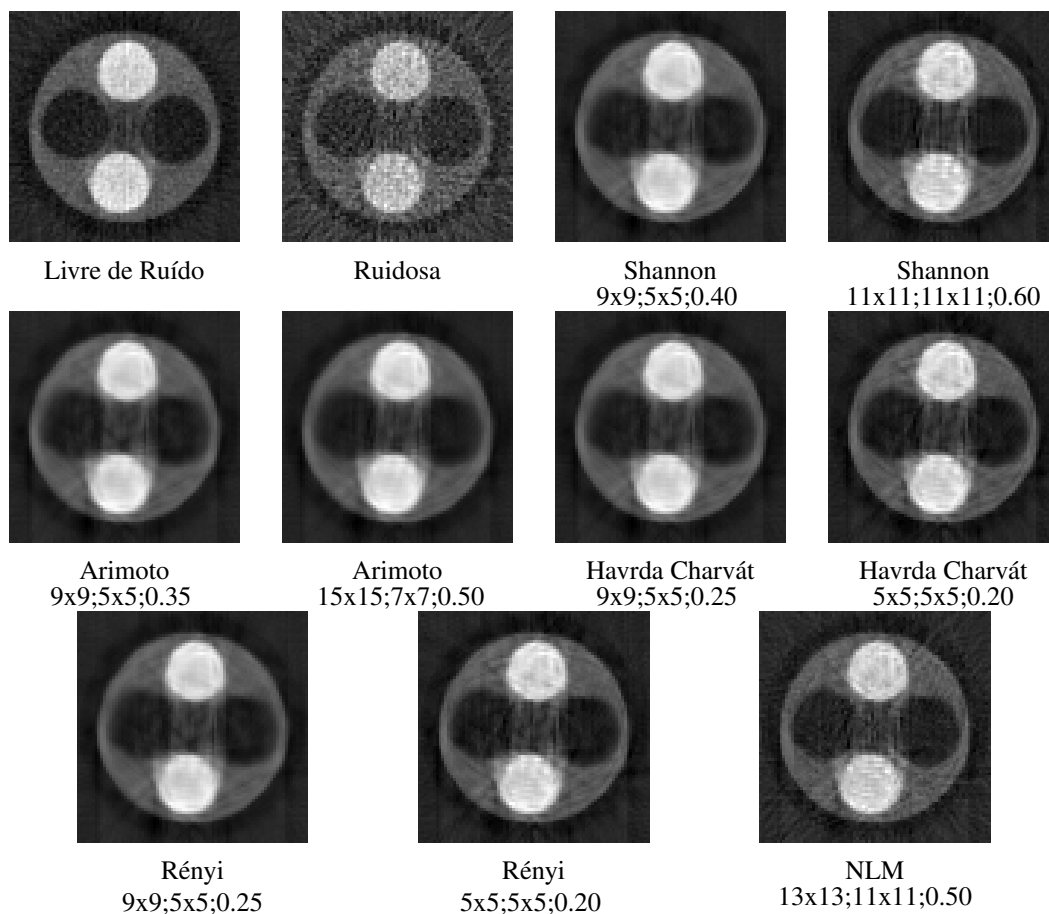
P-NLM obteve os melhores resultados em todas as condições.

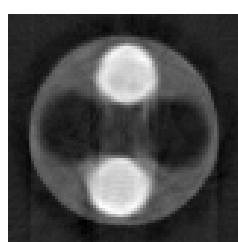
Com o método proposto e PSNR e FBP, para cada entropia há um resultado melhor que o BM3D.

Para PSNR com reconstrução POCS todos os resultados são superiores ao BM3D.

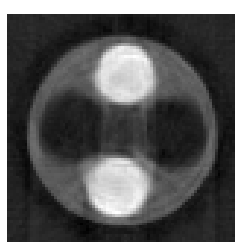
Método proposto com resultados semelhantes aos de Evangelista.

Figura 8.5. Imagens dos resultados do phantom Simétrico para reconstrução FBP

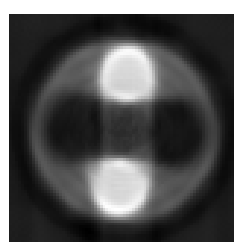




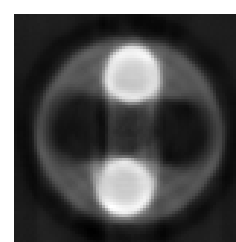
P-NLM
13x13;5x5;0.55



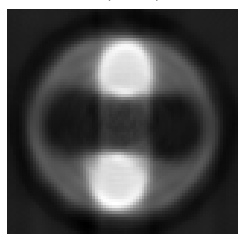
P-NLM
13x13;11x11;0.30



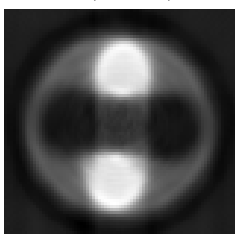
SP-NLM Bhattacharyya
7x7;5x5



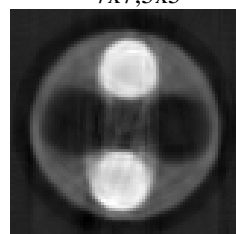
SP-NLM Hellinger
7x7;5x5



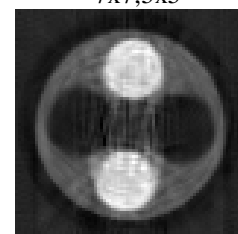
SP-NLM KL
7x7;5x5



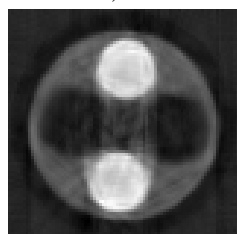
SP-NLM Rényi
7x7;7x7



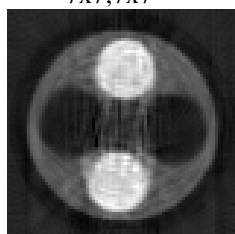
G-NLM Bhattacharyya
11x11;7x7;0.25



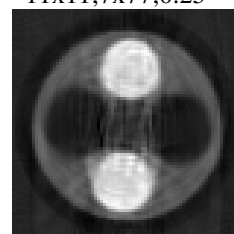
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.20



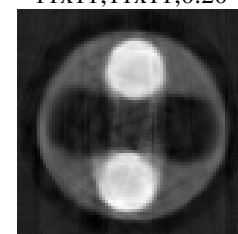
G-NLM Hellinger
9x9;5x5;0.15



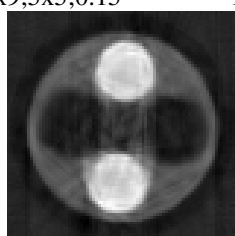
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.20



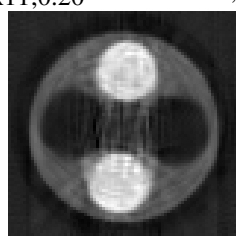
G-NLM KL
15x15;11x11;0.50



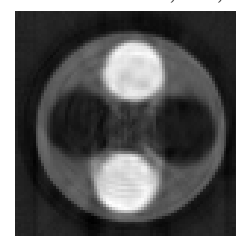
G-NLM KL
7x7;5x5;0.40



G-NLM Rényi
9x9;5x5;0.20

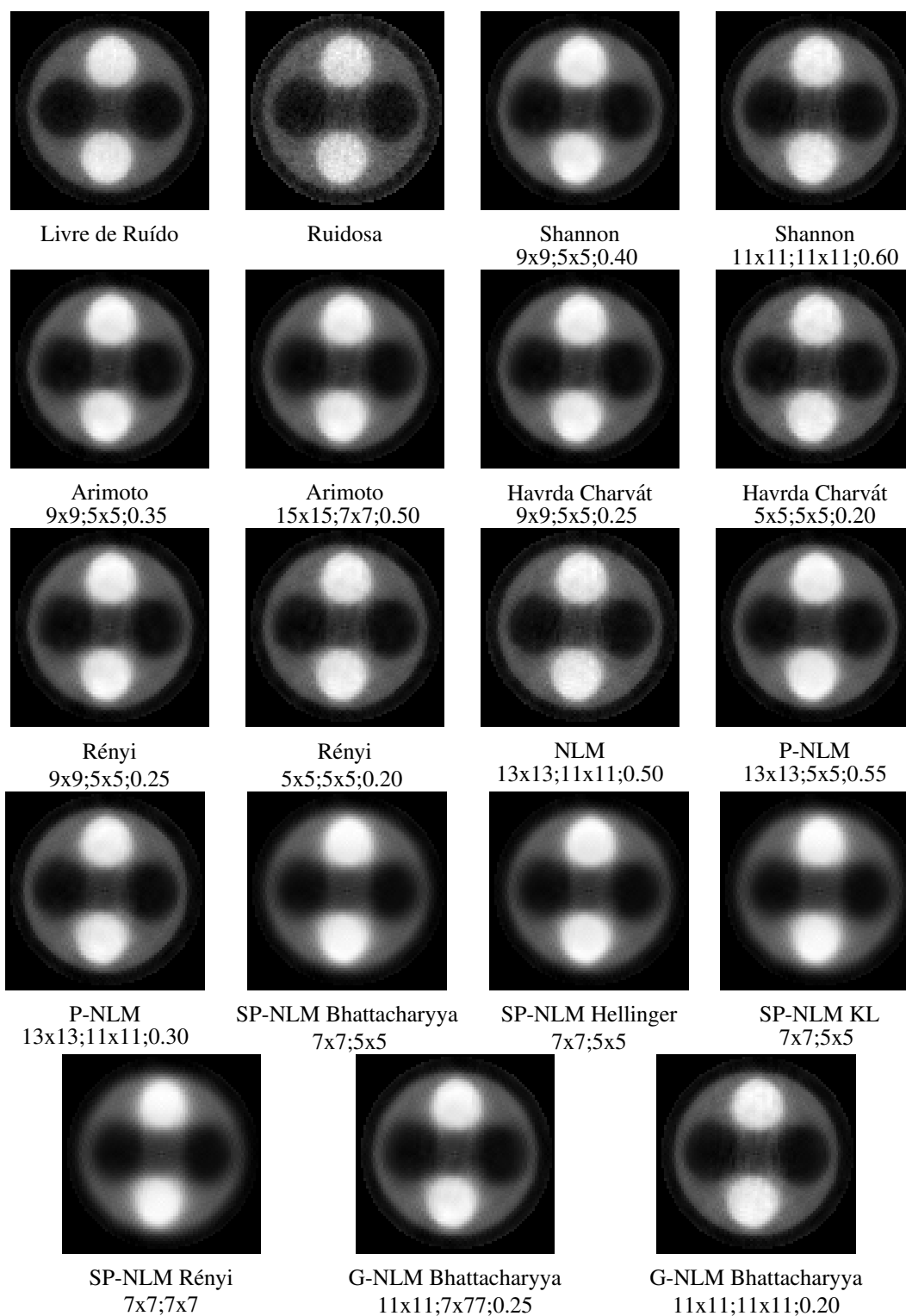


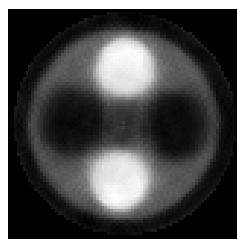
G-NLM Rényi
11x11;11x11;0.30



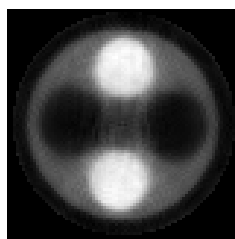
BM3D

Figura 8.6. Imagens dos resultados do phantom Simétrico para reconstrução POCS

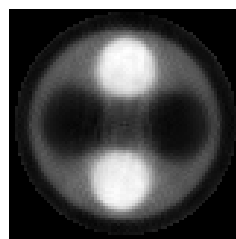




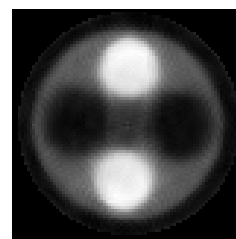
G-NLM Hellinger
9x9;5x5;0.15



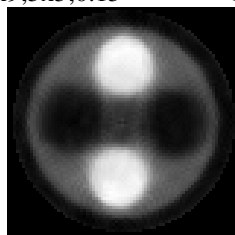
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.20



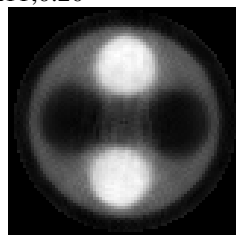
G-NLM KL
15x15;11x11;0.50



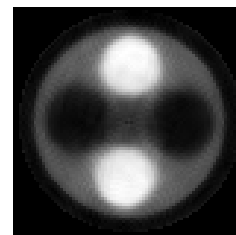
G-NLM KL
7x7;5x5;0.40



G-NLM Rényi
9x9;5x5;0.20



G-NLM Rényi
11x11;11x11;0.30



BM3D

8.4. Resultados Homogêneo

Tabela 8.4. Resultados Homogêneo

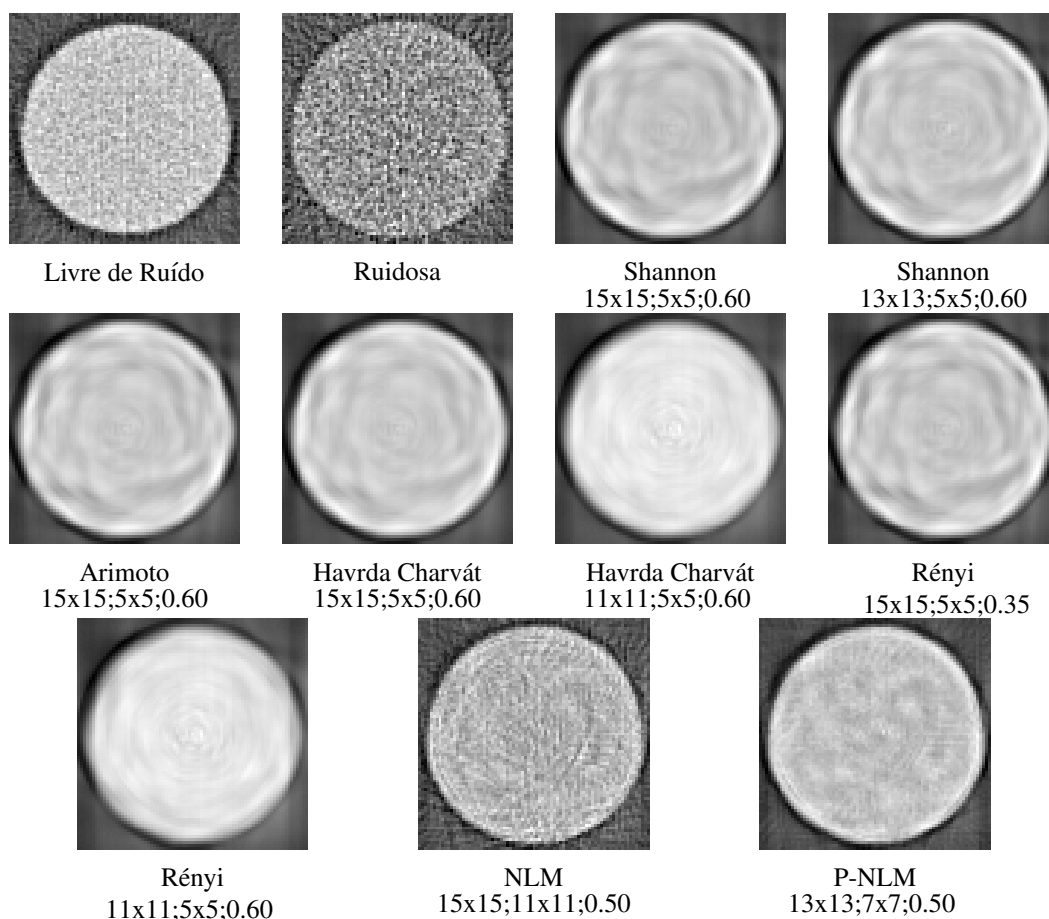
Métodos	Busca	Similaridade	h	FBP		POCS	
				PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Ruidoso				13.35	0.12	15.47	0.42
Shannon	15 × 15	5 × 5	0.60	18.62	0.32	19.98	0.65
Shannon	13 × 13	5 × 5	0.60	18.57	0.32	19.93	0.66
Arimoto $s = 1.1$	15 × 15	5 × 5	0.60	18.92	0.33	20.00	0.66
Havrda Charvát $s = 0.8$	15 × 15	5 × 5	0.40	18.93	0.34	20.82	0.68
Havrda Charvát $s = 0.8$	11 × 11	5 × 5	0.60	16.90	0.33	20.86	0.70
Rényi $s = 0.1$	15 × 15	5 × 5	0.35	18.84	0.32	19.83	0.65
Rényi $s = 0.1$	11 × 11	5 × 5	0.60	16.96	0.31	20.69	0.68
NLM	15 × 15	11 × 11	0.50	17.35	0.21	18.54	0.57
P-NLM	13 × 13	7 × 7	0.50	18.35	0.29	19.56	0.64
SP-NLM Bhattacharyya	13 × 13	7 × 7		17.57	0.35	22.84	<u>0.73</u>
SP-NLM Hellinger	7 × 7	7 × 7		18.05	0.35	20.61	0.71
SP-NLM Hellinger	13 × 13	7 × 7		16.96	0.34	22.35	0.72
SP-NLM KL	11 × 11	7 × 7		19.24	<u>0.38</u>	22.97	<u>0.73</u>
SP-NLM KL	13 × 13	7 × 7		17.66	0.37	<u>23.07</u>	0.74
SP-NLM Rényi	15 × 15	7 × 7		19.26	0.39	23.69	<u>0.73</u>
SP-NLM Rényi	13 × 13	7 × 7		18.61	0.39	23.05	0.74
G-NLM Bhattacharyya	15 × 15	5 × 5	0.30	<u>19.34</u>	0.32	19.66	0.65
G-NLM Bhattacharyya	15 × 15	9 × 9	0.50	17.62	0.33	20.53	0.69
G-NLM Hellinger	15 × 15	5 × 5	0.30	<u>19.34</u>	0.32	19.68	0.65
G-NLM Hellinger	15 × 15	9 × 9	0.50	17.63	0.33	20.52	0.69
G-NLM KL	9 × 9	5 × 5	0.50	18.66	0.31	17.80	0.61
G-NLM KL	15 × 15	11 × 11	0.50	18.14	0.30	18.63	0.65
G-NLM Rényi	15 × 15	5 × 5	0.45	19.36	0.32	19.66	0.65
G-NLM Rényi	15 × 15	7 × 7	0.50	18.38	0.33	19.90	0.67
BM3D				16.53	0.29	19.12	0.66

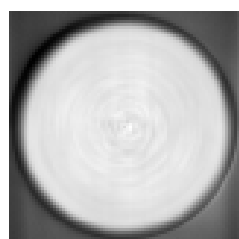
PSNR com FBP: Evangelista obtém os melhores resultados, para as outras métricas SP-NLM de Bindilatti & Mascarenhas (2013) obtém os melhores valores.

O método proposto possui resultados superiores ao BM3D em todas as métricas.

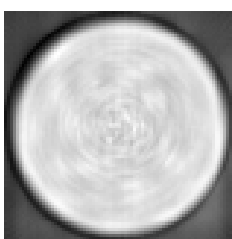
Esse é o único phantom em que o método SP-NLM obtém valores superiores aos demais métodos. Apenas em PSNR na reconstrução FBP o SP-NLM não tem o melhor resultado.

Figura 8.7. Imagens dos resultados do phantom Homogêneo para reconstrução FBP

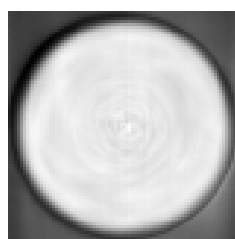




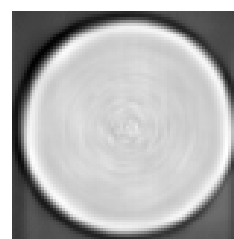
SP-NLM Bhattacharyya
13x13;7x7



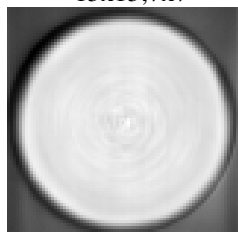
SP-NLM Hellinger
7x7;7x7



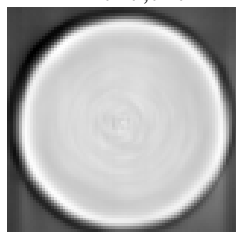
SP-NLM Hellinger
13x13;7x7



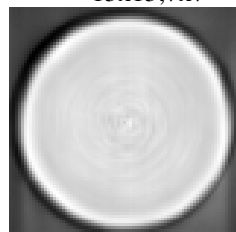
SP-NLM KL
11x11;7x7



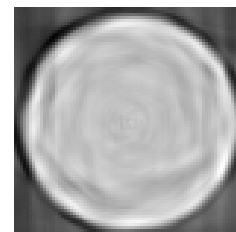
SP-NLM KL
13x13;7x7



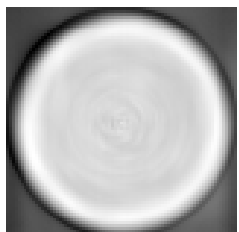
SP-NLM Rényi
15x15;7x7



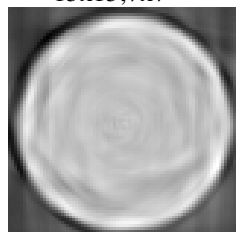
SP-NLM Rényi
13x13;7x7



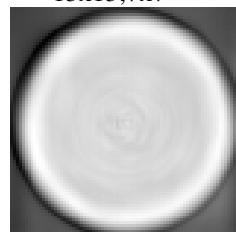
G-NLM Bhattacharyya
15x15;5x5;0.30



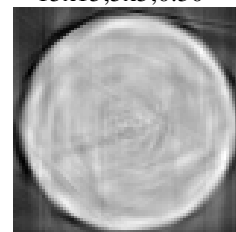
G-NLM Bhattacharyya
15x15;9x9x0.50



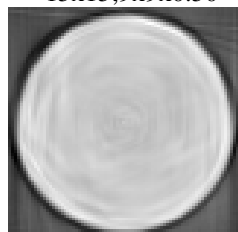
G-NLM Hellinger
15x15;5x5;0.30



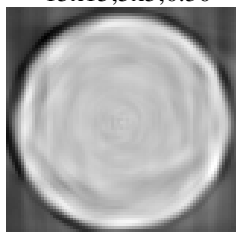
G-NLM Hellinger
15x15;9x9x0.50



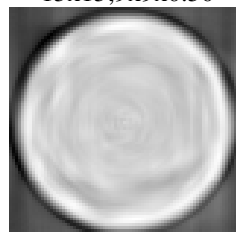
G-NLM KL
9x9;5x5x0.50



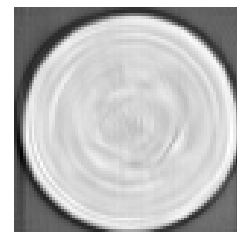
G-NLM KL
15x15;11x11;0.50



G-NLM Rényi
15x15;5x5;0.45

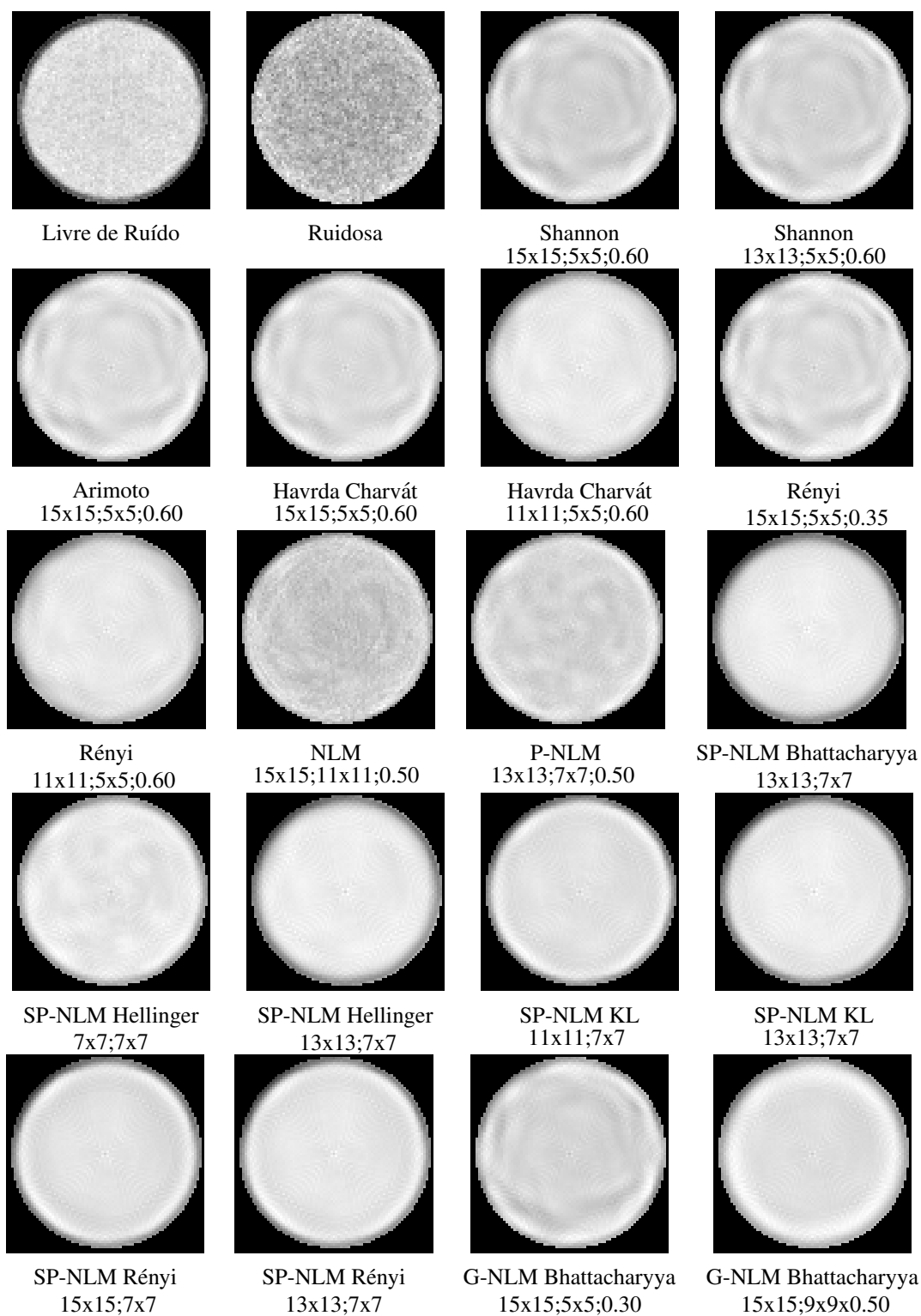


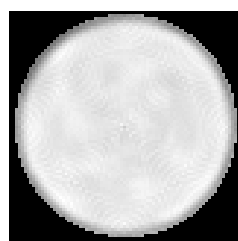
G-NLM Rényi
15x15;7x7;0.50



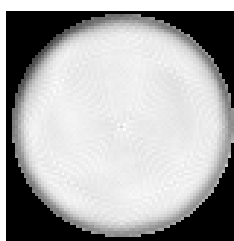
BM3D

Figura 8.8. Imagens dos resultados do phantom Homogêneo para reconstrução POCS

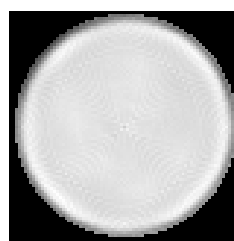




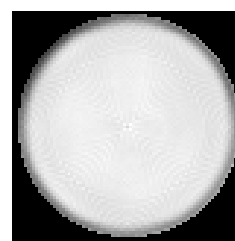
SP-NLM Hellinger
7x7;7x7



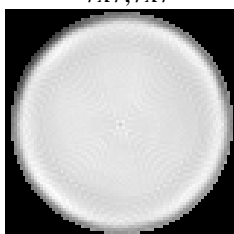
SP-NLM Hellinger
13x13;7x7



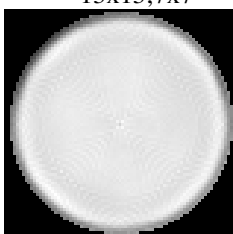
SP-NLM KL
11x11;7x7



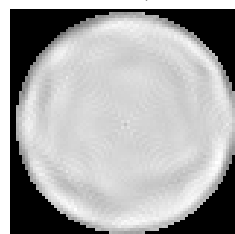
SP-NLM KL
13x13;7x7



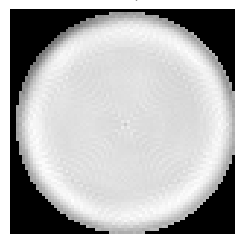
SP-NLM Rényi
15x15;7x7



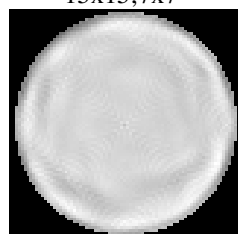
SP-NLM Rényi
13x13;7x7



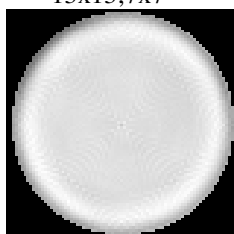
G-NLM Bhattacharyya
15x15;5x5;0.30



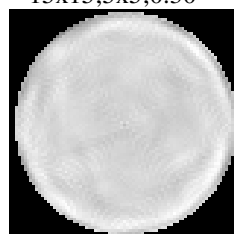
G-NLM Bhattacharyya
15x15;9x9x0.50



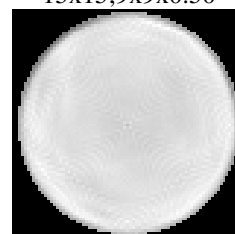
G-NLM Hellinger
15x15;5x5;0.30



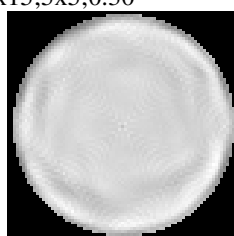
G-NLM Hellinger
15x15;9x9x0.50



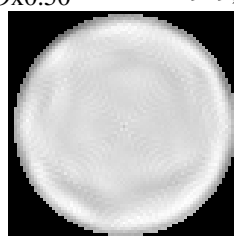
G-NLM KL
9x9;5x5x0.50



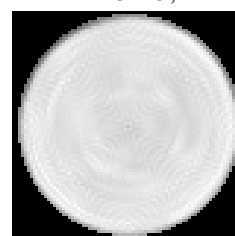
G-NLM KL
15x15;11x11;0.50



G-NLM Rényi
15x15;5x5;0.45



G-NLM Rényi
15x15;7x7;0.50



BM3D

8.5. Resultados Madeira 1

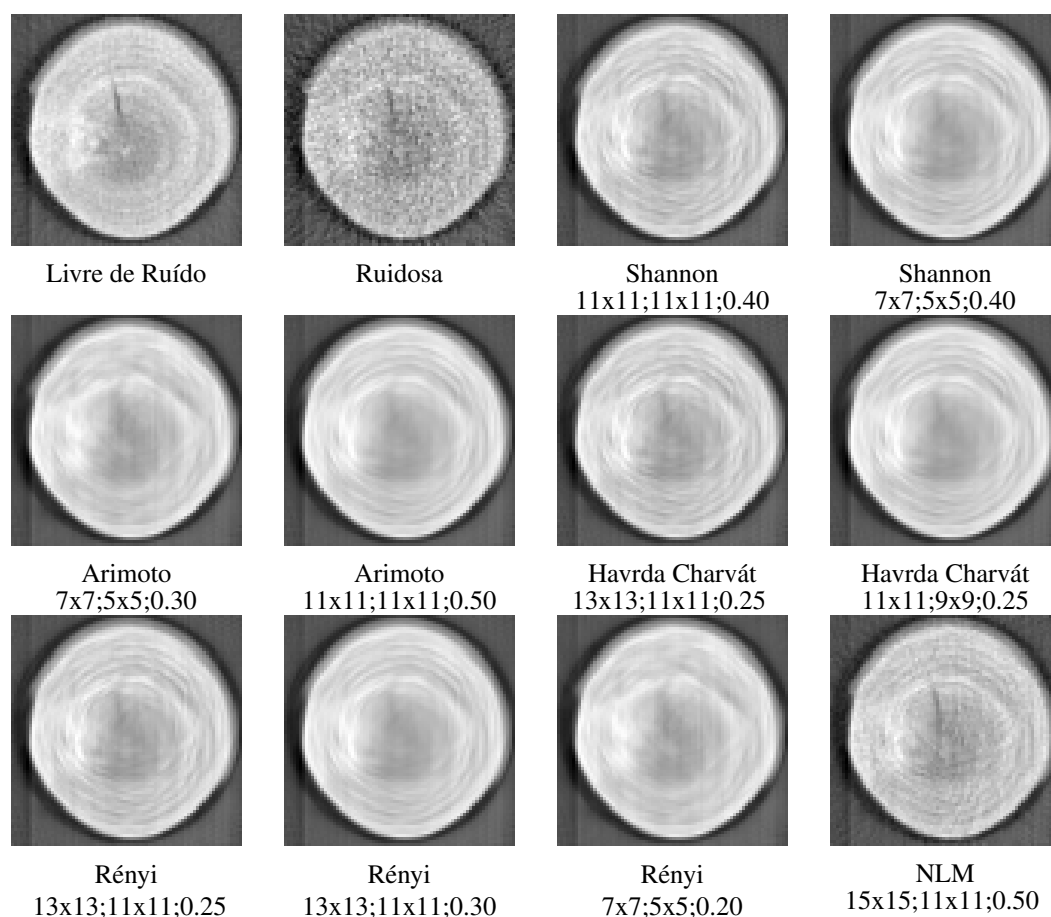
Tabela 8.5. Resultados Madeira 1

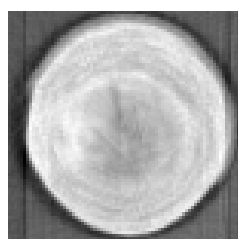
Métodos	Busca	Similaridade	h	FBP		POCS	
				PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Ruidoso				21.91	0.68	34.08	0.91
Shannon	11×11	11×11	0.40	<u>30.66</u>	0.83	37.84	<u>0.96</u>
Shannon	7×7	5×5	0.40	28.84	0.82	<u>38.48</u>	<u>0.96</u>
Arimoto $s = 1.1$	7×7	5×5	0.30	29.11	0.83	38.46	<u>0.96</u>
Arimoto $s = 1.1$	11×11	11×11	0.50	29.03	<u>0.84</u>	37.63	0.97
Havrda Charvát $s = 0.8$	13×13	11×11	0.25	30.69	0.83	37.86	<u>0.96</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	11×11	9×9	0.25	29.43	<u>0.84</u>	38.12	0.97
Rényi $s = 0.1$	13×13	11×11	0.25	30.64	0.83	37.72	<u>0.96</u>
Rényi $s = 0.1$	13×13	11×11	0.30	29.61	<u>0.84</u>	37.64	0.97
Rényi $s = 0.1$	7×7	5×5	0.20	29.06	0.82	<u>38.48</u>	<u>0.96</u>
NLM	15×15	11×11	0.50	28.44	0.82	37.75	<u>0.96</u>
P-NLM	9×9	5×5	0.50	28.38	0.78	37.06	<u>0.96</u>
P-NLM	13×13	5×5	0.50	27.38	0.81	37.46	<u>0.96</u>
SP-NLM Bhattacharyya	7×7	5×5		23.32	0.70	21.38	0.92
SP-NLM Hellinger	7×7	5×5		21.10	0.63	20.21	0.88
SP-NLM KL	7×7	5×5		23.02	0.69	20.87	0.92
SP-NLM Rényi	7×7	5×5		22.94	0.69	20.78	0.92
G-NLM Bhattacharyya	11×11	11×11	0.10	30.58	0.83	37.48	<u>0.96</u>
G-NLM Bhattacharyya	7×7	5×5	0.10	28.77	0.81	38.05	<u>0.96</u>
G-NLM Hellinger	11×11	11×11	0.10	30.58	0.83	37.48	<u>0.96</u>
G-NLM Hellinger	7×7	5×5	0.10	28.77	0.81	38.05	<u>0.96</u>
G-NLM KL	13×13	11×11	0.20	30.54	0.82	37.13	<u>0.96</u>
G-NLM KL	7×7	5×5	0.20	29.23	0.80	38.00	<u>0.96</u>
G-NLM Rényi	9×9	9×9	0.10	30.52	0.82	37.13	<u>0.96</u>
G-NLM Rényi	11×11	5×5	0.10	29.83	0.81	38.01	<u>0.96</u>
BM3D				29.25	0.85	38.75	0.97

Os melhores resultados para PSNR na reconstrução FBP foram obtidos pelo método proposto. O BM3D obteve o melhor resultado com SSIM para reconstrução FBP, e PSNR para reconstrução POCS. Em SSIM com POCS o método proposto obteve resultado similar ao BM3D.

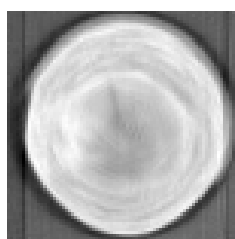
Para o phantom Madeira 1, *Eucalyptus Saligna*, o método proposto superou todos os outros métodos baseados em BM3D.

Figura 8.9. Imagens dos resultados do phantom Madeira 1 para reconstrução FBP

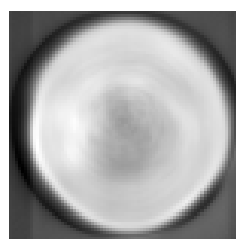




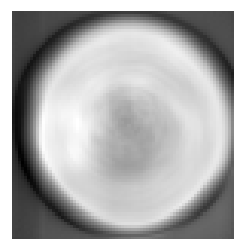
P-NLM
9x9;5x5;0.50



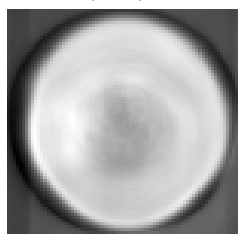
P-NLM
13x13;5x5;0.50



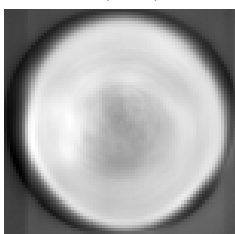
SP-NLM Bhattacharyya
7x7;5x5



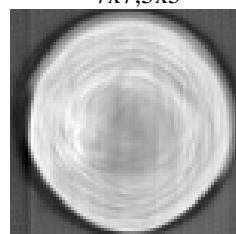
SP-NLM Hellinger
7x7;5x5



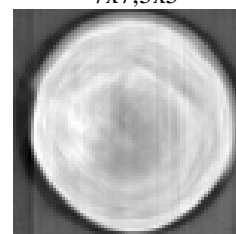
SP-NLM KL
7x7;5x5



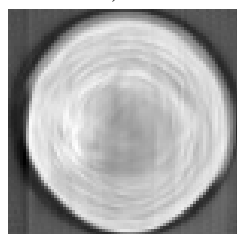
SP-NLM Rényi
7x7;5x5



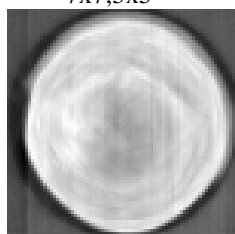
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.10



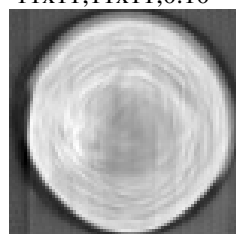
G-NLM Bhattacharyya
7x7;5x5;0.10



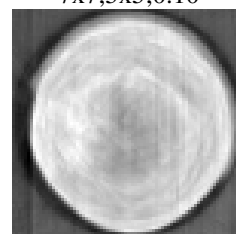
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.10



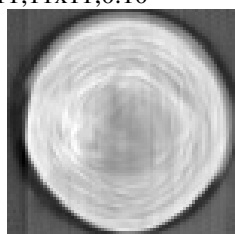
G-NLM Hellinger
7x7;5x5;0.10



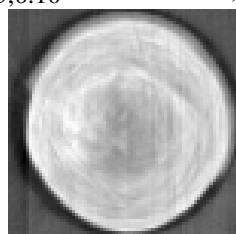
G-NLM KL
11x11;11x11;0.20



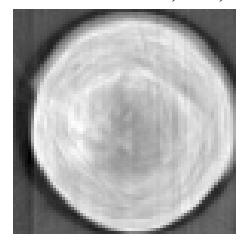
G-NLM KL
7x7;5x5;0.20



G-NLM Rényi
9x9;9x9;0.10

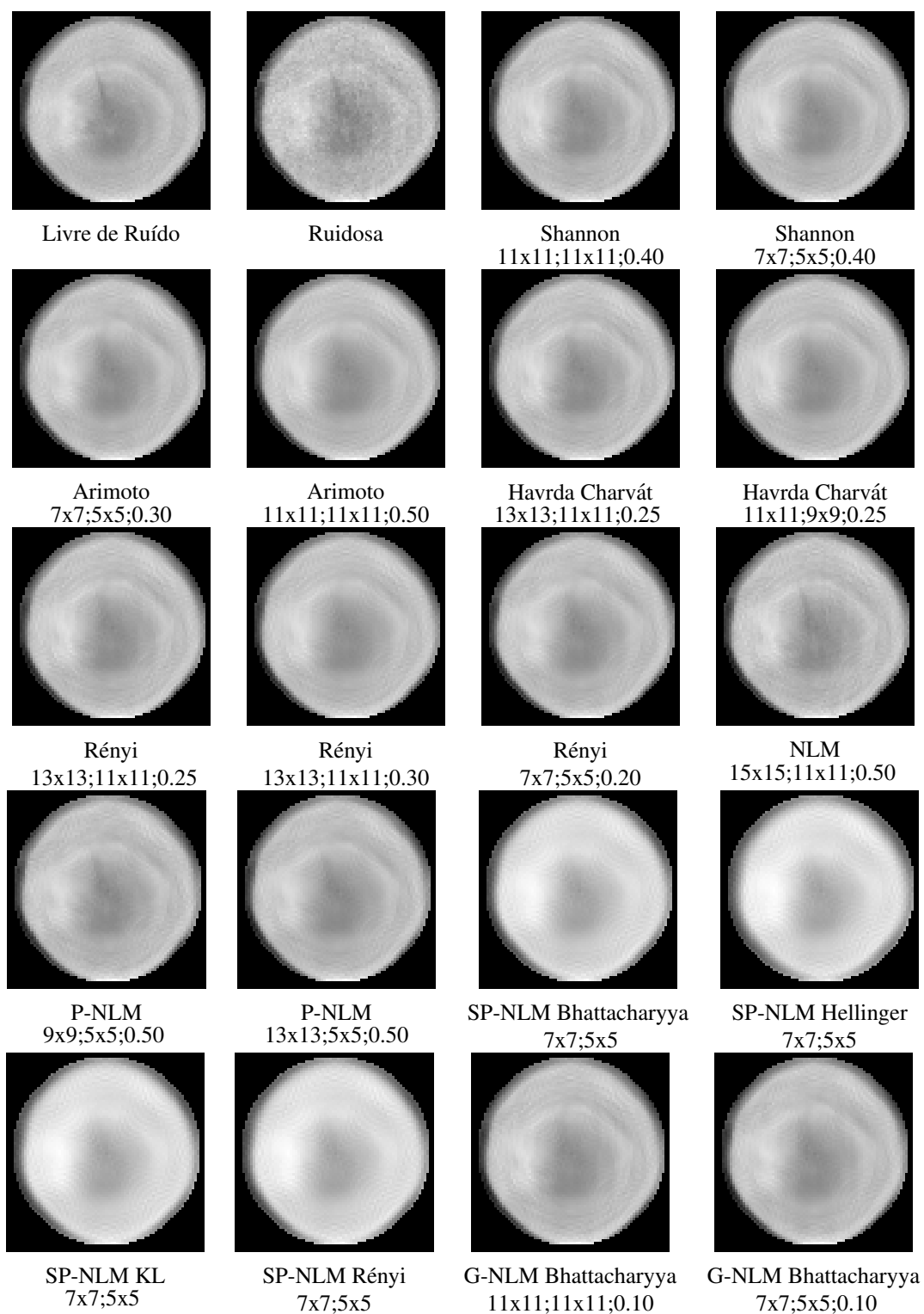


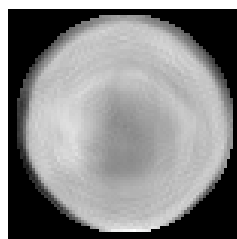
G-NLM Rényi
11x11;5x5;0.10



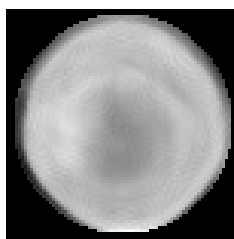
BM3D

Figura 8.10. Imagens dos resultados do phantom Madeira 1 para reconstrução POCS

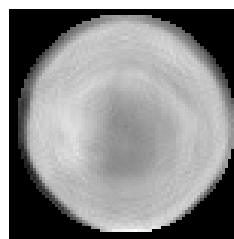




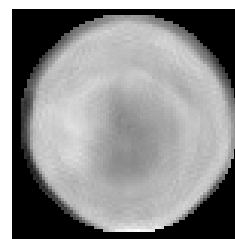
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.10



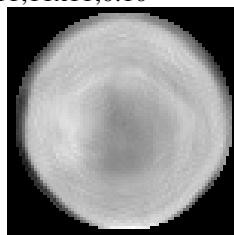
G-NLM Hellinger
7x7;5x5;0.10



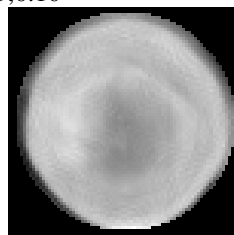
G-NLM KL
11x11;11x11;0.20



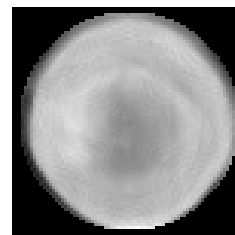
G-NLM KL
7x7;5x5;0.20



G-NLM Rényi
9x9;9x9;0.10



G-NLM Rényi
11x11;5x5;0.10



BM3D

8.6. Resultados Madeira 2

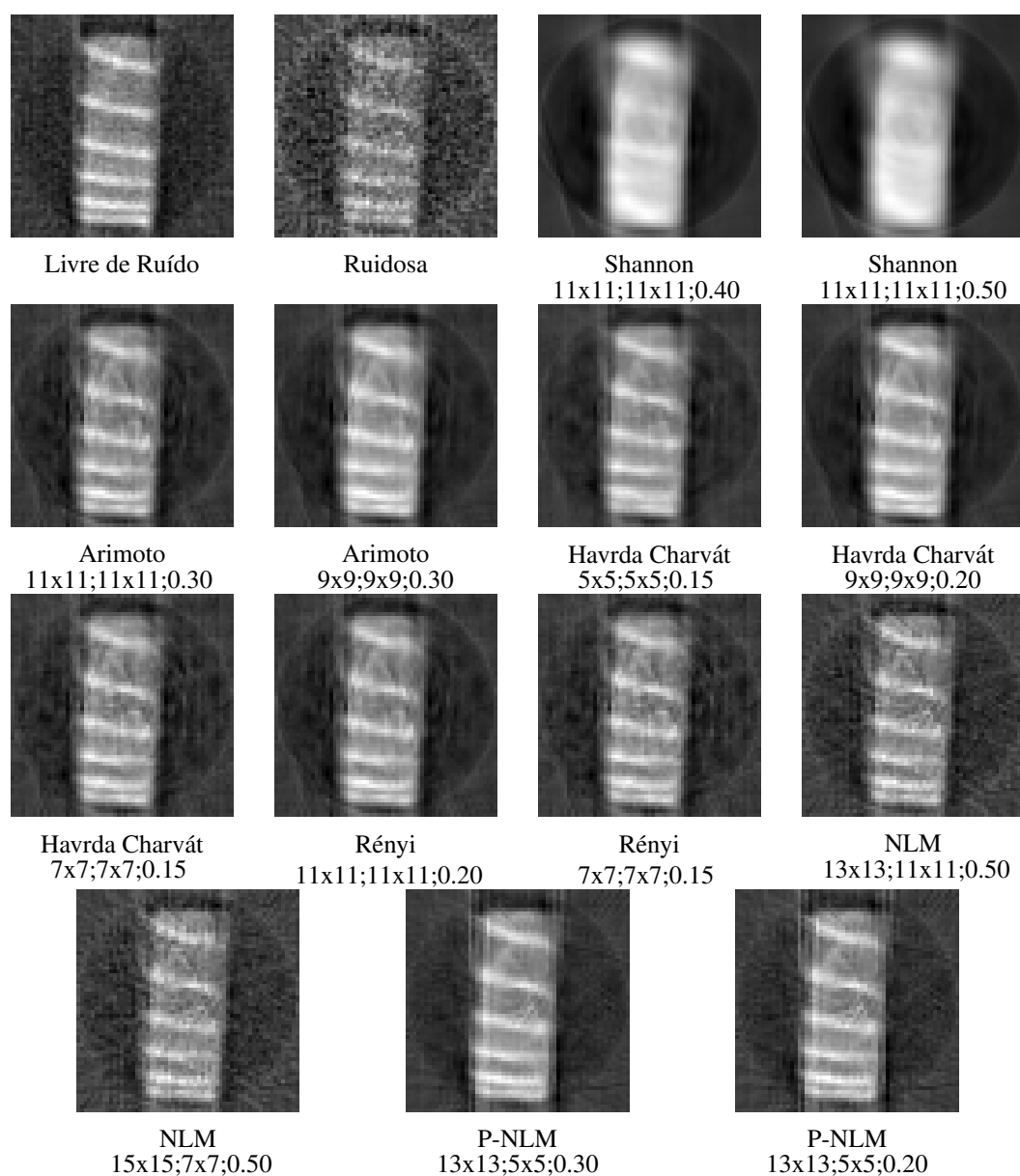
Tabela 8.6. Resultados Madeira 2

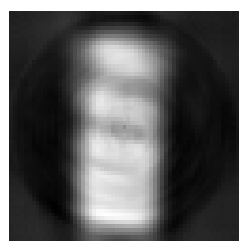
Métodos	Busca	Similaridade	h	FBP		POCS	
				PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Ruidoso				19.88	0.56	21.66	0.69
Shannon	11 × 11	11 × 11	0.40	26.33	<u>0.68</u>	29.95	0.89
Shannon	11 × 11	11 × 11	0.50	24.94	<u>0.68</u>	30.05	<u>0.91</u>
Arimoto $s = 1.1$	11 × 11	11 × 11	0.30	26.21	0.67	30.00	0.89
Arimoto $s = 1.1$	9 × 9	9 × 9	0.30	24.95	0.67	29.72	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	5 × 5	5 × 5	0.15	26.39	<u>0.68</u>	29.50	0.90
Havrda Charvát $s = 0.8$	9 × 9	9 × 9	0.20	24.96	<u>0.68</u>	29.45	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	7 × 7	7 × 7	0.15	25.93	0.65	30.62	0.89
Rényi $s = 0.1$	11 × 11	11 × 11	0.20	<u>26.23</u>	0.67	30.28	0.90
Rényi $s = 0.1$	7 × 7	7 × 7	0.15	25.70	0.64	30.45	0.89
NLM	13 × 13	11 × 11	0.50	24.64	0.68	28.23	0.87
NLM	15 × 15	7 × 7	0.50	23.89	0.66	28.55	0.88
P-NLM	13 × 13	5 × 5	0.30	25.76	0.67	<u>30.79</u>	0.90
P-NLM	13 × 13	5 × 5	0.20	25.10	0.65	30.45	<u>0.91</u>
SP-NLM Bhattacharyya	7 × 7	7 × 7		18.01	0.47	22.37	0.74
SP-NLM Hellinger	7 × 7	7 × 7		18.02	0.46	22.25	0.73
SP-NLM KL	7 × 7	7 × 7		18.00	0.47	22.41	0.74
SP-NLM Rényi	7 × 7	7 × 7		18.01	0.47	22.37	0.74
G-NLM Bhattacharyya	7 × 7	7 × 7	0.10	24.79	0.64	28.38	0.88
G-NLM Bhattacharyya	11 × 11	11 × 11	0.10	23.31	0.65	27.83	0.89
G-NLM Hellinger	7 × 7	7 × 7	0.10	24.79	0.64	28.38	0.88
G-NLM Hellinger	11 × 11	11 × 11	0.10	23.31	0.65	27.83	0.89
G-NLM KL	11 × 11	11 × 11	0.15	24.76	0.64	29.15	0.87
G-NLM Rényi	7 × 7	7 × 7	0.10	25.35	0.64	28.57	0.86
G-NLM Rényi	13 × 13	7 × 7	0.10	24.96	0.63	29.28	0.87
BM3D	×	×		24.80	0.72	31.43	0.92

De forma similar ao phantom Madeira 1, nesse phantom de *Pinus Elliottii* os melhores resultados para PSNR na reconstrução FBP foram obtidos pelo método proposto. Para SSIM em FBP o BM3D obteve o melhor resultado, com o método proposto em segundo.

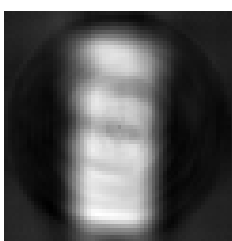
Para reconstrução POCS o BM3D obteve os melhores resultados para ambas as métricas. Para PSNR P-NLM obteve o segundo melhor resultado, e em SSIM o método proposto se igualou ao P-NLM com segundo melhor resultado.

Figura 8.11. Imagens dos resultados do phantom Madeira 2 para reconstrução FBP

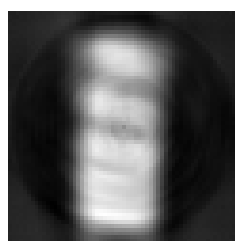




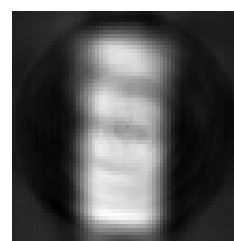
SP-NLM Bhattacharyya
7x7;7x7



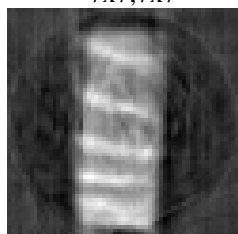
SP-NLM Hellinger
7x7;7x7



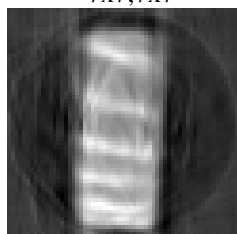
SP-NLM KL
7x7;7x7



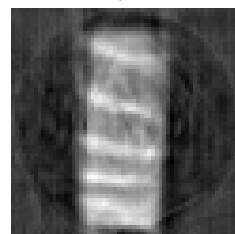
SP-NLM Rényi
7x7;7x7



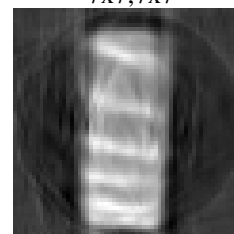
G-NLM Bhattacharyya
7x7;7x7;0.10



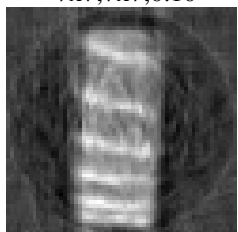
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.10



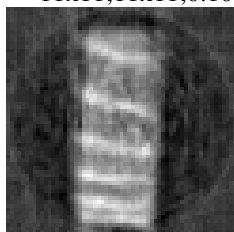
G-NLM Hellinger
7x7;7x7;0.10



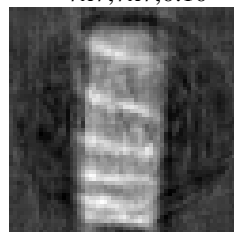
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.10



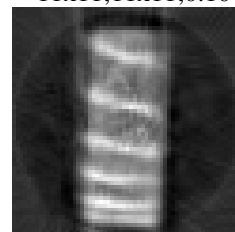
G-NLM KL
11x11;11x11;0.10



G-NLM Rényi
7x7;7x7;0.10

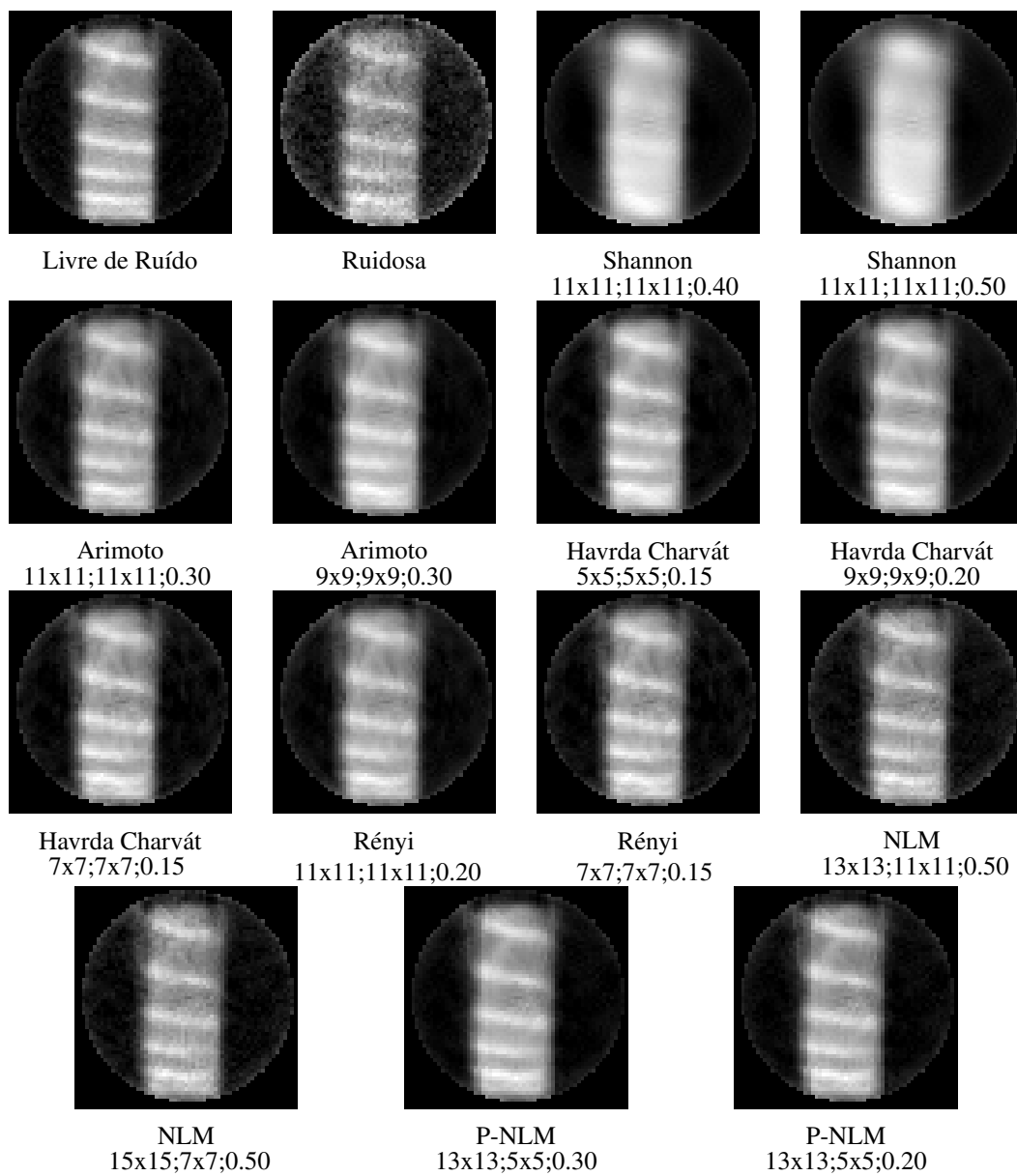


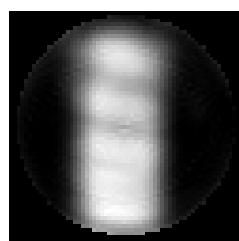
G-NLM Rényi
13x13;7x7;0.10



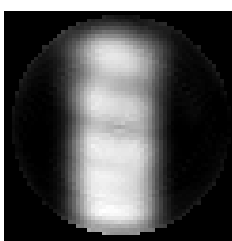
BM3D

Figura 8.12. Imagens dos resultados do phantom Madeira 2 para reconstrução POCS

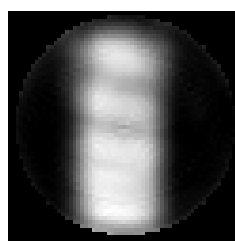




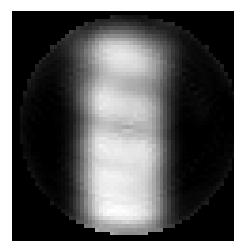
SP-NLM Bhattacharyya
7x7;7x7



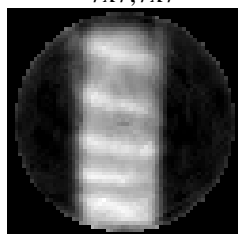
SP-NLM Hellinger
7x7;7x7



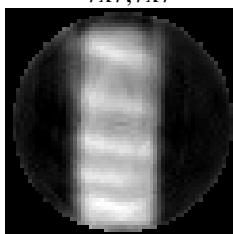
SP-NLM KL
7x7;7x7



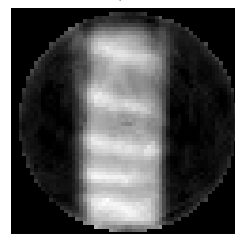
SP-NLM Rényi
7x7;7x7



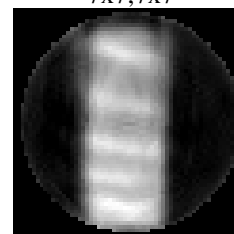
G-NLM Bhattacharyya
7x7;7x7;0.10



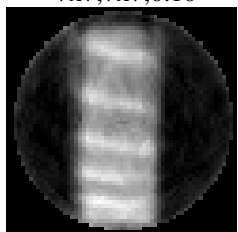
G-NLM Bhattacharyya
11x11;11x11;0.10



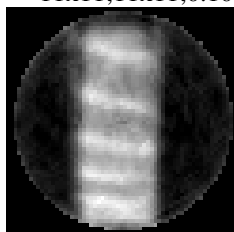
G-NLM Hellinger
7x7;7x7;0.10



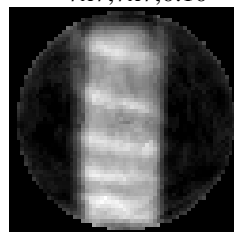
G-NLM Hellinger
11x11;11x11;0.10



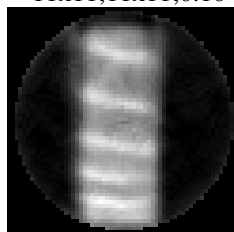
G-NLM KL
11x11;11x11;0.10



G-NLM Rényi
7x7;7x7;0.10



G-NLM Rényi
13x13;7x7;0.10



BM3D

8.7. Avaliação dos Resultados

É possível observar pelos resultados obtidos que a utilização da reconstrução POCS de um sinograma ruidoso sempre obtém imagens mais próximas às sem ruído do que a reconstrução FBP.

Com exceção dos resultados obtidos no phantom homogêneo, o método SP-NLM foi inferior aos demais métodos avaliados nesse trabalho.

Comparando as entropias utilizadas pelo método proposto neste trabalho, todas elas obtiveram desempenho similares. Os resultados de Havrda Charvát e Rényi em especial obtiveram valores de métricas sempre próximos uns dos outros.

Apesar de apenas a distância Shannon ser a única calculada de forma exata, ao comparar com as demais entropias, os resultados mostram que o cálculo numérico de distâncias geodésicas é viável, não havendo degradação aparente do resultado pela utilização de resultados não exatos para essas distâncias.

8.7.1. Método Proposto comparado ao de Evangelista

Com exceção dos phantoms Madeira 1 Madeira 2, o método proposto possui performance semelhante ao de Evangelista.

No phantom simulado Shepp-Logan o método proposto possui desempenho superior na reconstrução FBP nas duas métricas PSNR e SSIM. O método de Evangelista foi melhor na métrica PSNR utilizando a reconstrução POCS. Na métrica SSIM em POCS os resultados das duas abordagens foram similares.

De forma inversa ao que ocorreu no Shepp-Logan, no phantom Assimétrico o método de Evangelista obteve melhores resultados na reconstrução FBP para ambas métricas, e o método proposto obteve resultado melhor para PSNR na reconstrução POCS. Ambos os métodos obtiveram resultados similares na métrica SSIM com reconstrução POCS.

Para o phantom Simétrico, as duas abordagens obtiveram resultados semelhantes.

No phantom Homogêneo os dois métodos obtiveram resultados similares para SSIM em ambas formas de reconstrução. EM FBP o método de Evangelista obteve resultados superiores para métrica PSNR, enquanto o método proposto obteve resultados melhores em PSNR para reconstrução POCS.

Nos phantom Madeira 1 e Madeira 2 os resultados do método proposto foram superiores em todas as métricas.

8.7.2. Método Proposto comparado ao P-NLM

Em três dos phantoms do conjunto de teste, o método proposto supera os resultados de P-NLM em todas as métricas. Os phantoms são Assimétrico, Homogêneo e Madeira 1.

No phantom Shepp-Logan P-NLM possui resultado superior em PSNR na reconstrução FBP, enquanto o método proposto supera nas demais métricas.

Simétrico: o P-NLM possui melhores resultados PSNR para ambas reconstruções, com as métricas SSIM obtiveram resultados equiparáveis.

Madeira 2 proposto possui melhores resultados em FBP nas duas métricas enquanto P-NLM possui melhores resultados em POCS também para as duas métricas.

8.7.3. Método Proposto Comparado ao BM3D

No phantom Homogêneo o método proposto foi superior ao BM3D em todas as métricas. O BM3D obteve os melhores resultados em todas as métricas no phantom Assimétrico. Nos phantoms Madeira 1 e Madeira 2, com exceção de PSNR na reconstrução FBP, o BM3D obteve os melhores valores nas demais métricas.

Com exceção do phantom Homogêneo, o BM3D obteve os melhores valores de SSIM. No phantom Shepp-Logan com reconstrução POCS, o BM3D obteve o segundo melhor resultado, em SSIM, enquanto que nos demais phantoms obteve os melhores resultados para todas métricas SSIM em ambas reconstruções.

Comparando com o método proposto, nos phantom Shepp-Logan e Simétrico o BM3D obteve resultados similares em SSIM para ambas reconstruções. Mas o método proposto obteve resultados superiores em PSNR para as duas reconstruções.

No phantom Assimétrico o BM3D possui resultados superiores em todas as métricas, enquanto que no phantom Homogêneo o método proposto possui resultados superiores em todas as métricas.

Nos phantoms Madeira 1 e Madeira 2 o método proposto obteve melhores resultados em PSNR para reconstrução FBP enquanto o BM3D obteve resultados superiores nas demais métricas.

9 Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesse trabalho filtramos sinogramas provenientes de Tomografias Computadorizadas de Baixa Dosagem, alterando o algoritmo NLM ao substituir a distância Euclidiana por distâncias estatísticas geodésicas para a distribuição Gama.

O método proposto foi comparado aos seguintes métodos: NLM, Poisson-NLM, Stochastic-Poisson NLM, NLM com Distâncias Estocásticas e BM3D. A avaliação dos resultados foi feita por métricas de similaridade, PSNR e SSIM, entre a imagem reconstruída do sinograma filtrado e a imagem reconstruída do sinograma livre de ruído.

Pela simplicidade matemática, o método proposto assume que o sinograma original livre de ruído obedece a uma distribuição Gama, por essa ser conjugada da Poisson (usada para modelar o ruído). Os resultados obtidos mostram que a abordagem de utilizar as distribuições conjugadas Gama e Poisson é viável, obtendo entre os melhores dos métodos baseados em NLM e comparáveis ao BM3D.

No decorrer do desenvolvimento desse trabalho obtivemos uma solução fechada para uma distância geodésica, a de Shannon, para a distribuição Gama. Para nosso conhecimento, nenhum trabalho anterior publicou uma solução fechada para esse modelo.

Para as entropias em que não foi possível obter uma solução fechada para distância geodésica foram utilizadas integrações numéricas com “look-up table” para o cálculo da distância final. Observou-se que não houve perda na qualidade dos resultados quando comparados ao valores obtidos pela distância geodésica para a entropia de Shannon.

Foi observado que a qualidade dos resultados obtidos varia consideravelmente desentendendo do valor escolhido para o parâmetro h (equação 6.2). Como trabalho futuro há a possibilidade de configurar de forma automática esse parâmetro. Outra opção é configurar esse parâmetro de forma adaptativa, em que h assume valores distintos para cada pixel sendo filtrado.

Utilizar distâncias geodésicas entre distribuições conjugadas do ruído possui o potencial de ser adaptado para outros domínios de dados, como imagens de radar de abertura sintética e outras formas de imagens médicas como ressonância magnética.

O modelo de distâncias geodésicas se mostrou viável na comparação de “patches” de sinograma de tomografia computadorizada. Assim, há a possibilidade de aplicar essas distâncias na criação de descritores a serem usados em aplicações de reconhecimento de padrões em CT.

Esse trabalho cumpriu o objetivo de se desenvolver um método de filtragem de sinograma de tomografia computadorizada de baixa dosagem que fosse tão eficaz como outros métodos no estado da arte. Obtivemos em seu decorrer uma solução fechada para a distância geodésica segundo a distribuição Gama.

9.1. Artigo Submetido

Um artigo foi submetido ao IEEE Signal Processing Letters intitulado “Bayesian Tomographic Reconstruction at Low Counting Rates Using Geodesic Distances” com autoria de Daniel de Almeida Góes e Nelson Delfino d’Ávila Mascarenhas.

O código do projeto foi publicado na plataforma CodeOcean no seguinte link:

<https://doi.org/10.24433/CO.baa5e6c4-d046-4e20-8eb2-9077c1ce0dee>

Anexo

Nas equações abaixo γ é a constante de Euler-Mascheroni,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$$

$$\gamma \approx 0,57721566$$

H_n é o número harmônico

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

e $\psi^{(m)}(z)$ é a função polígama.

$$\psi^{(m)}(z) = \frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}} \ln \Gamma(z)$$

Tensores g_{ij} para entropia Arimoto

Para a entropia de Arimoto o parâmetro s possui as seguintes restrições:

$$s > 0$$

$$s \neq 1$$

$$a + s > 1$$

como a é normalizado, isto é, $0 < a \leq 1$, as restrições podem ser reescritas por:

$$s > 1$$

$g_{\alpha\alpha} =$

$$\left\{ sb^{\frac{2a}{s}-2} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2}{s}-\frac{2a}{s}} \Gamma(a)^{-2/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right)^2 \left(sb^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^{s-2} \right. \\ \left(\psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) - \psi^{(0)}(a) + \log(s) \right)^2 - b^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \\ \left(sb^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^{s-1} \left(\psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^2 \\ - 2\psi^{(0)}(a)\psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) + \psi^{(1)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \\ \left. - 2\psi^{(0)}(a)\log(s) + 2\log(s)\psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) + \psi^{(0)}(a)^2 + \log^2(s) \right\}$$

$g_{\alpha\beta} =$

$$\left\{ b^{\frac{a}{s}-2} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \left(sb^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^{s-1} \right. \\ \left(-s\psi^{(0)}(a) + s\psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) - \psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) + \psi^{(0)}(a) + s + s\log(s) - \log(s) \right) \\ - (s-1)sb^{\frac{2a}{s}-3} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2}{s}-\frac{2a}{s}} \Gamma(a)^{-2/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right)^2 \\ \left(sb^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^{s-2} \left(\psi^{(0)}\left(\frac{a+s-1}{s}\right) - \psi^{(0)}(a) + \log(s) \right) \left. \right\}$$

$g_{\beta\beta} =$

$$\left\{ (s-1)^2 sb^{\frac{2a}{s}-4} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{2}{s}-\frac{2a}{s}} \Gamma(a)^{-2/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right)^2 \right. \\ \left(sb^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^{s-2} - (as + 2s^2 - 3s + 1) b^{\frac{a}{s}-3} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \\ \left. \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \left(sb^{\frac{a}{s}-1} \left(\frac{b}{s}\right)^{\frac{1}{s}-\frac{a}{s}} \Gamma(a)^{-1/s} \Gamma\left(\frac{a+s-1}{s}\right) \right)^{s-1} \right\}$$

Tensores g_{ij} para entropia Havrda-Charvát

Para a entropia de Havrda-Charvát o parâmetro s possui as seguintes restrições:

$$s > 0$$

$$s \neq 1$$

$$s(a-1) > -1$$

como $0 < a \leq 1$, as restrições podem ser reescritas por:

$$0 < s < 1$$

$$g_{\alpha\alpha} =$$

$$\left\{ -\frac{1}{b} s^{-as} \Gamma((a-1)s+1) \left(\frac{bs}{\Gamma(a)} \right)^s \left((H_{(a-1)s})^2 - 2\gamma H_{(a-1)s} \right. \right. \\ \left. \left. - 2\log(s) H_{(a-1)s} - 2\psi^{(0)}(a) H_{(a-1)s} + \psi^{(1)}((a-1)s+1) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\psi^{(0)}(a) \log(s) + \psi^{(0)}(a)^2 + 2\gamma\psi^{(0)}(a) + \log^2(s) + 2\gamma \log(s) + \gamma^2 \right) \right\}$$

$$g_{\alpha\beta} =$$

$$\left\{ \frac{1}{b^2} s^{-as-1} \Gamma((a-1)s+1) \left(\frac{bs}{\Gamma(a)} \right)^s \left(s(-H_{(a-1)s}) + H_{(a-1)s} + s\psi^{(0)}(a) \right. \right. \\ \left. \left. - \psi^{(0)}(a) + \gamma s + s \log(s) - \log(s) - \gamma + 1 \right) \right\}$$

$$g_{\beta\beta} =$$

$$\left\{ -\frac{s^{-as-2} (as + s^2 - 3s + 2) \Gamma((a-1)s+1) \left(\frac{bs}{\Gamma(a)} \right)^s}{b^3} \right\}$$

Tensores g_{ij} para entropia Rényi

Para a entropia de Havrda-Charvát o parâmetro s possui as mesmas restrições para Havrda-Charvát.

$$0 < s < 1$$

$$\mathbf{g}_{\alpha\alpha} =$$

$$\left\{ s \left((H_{(a-1)s})^2 - 2\gamma H_{(a-1)s} - 2\log(s)H_{(a-1)s} - 2\psi^{(0)}(a)H_{(a-1)s} \right. \right. \\ \left. \left. + \psi^{(1)}((a-1)s+1) + 2\psi^{(0)}(a)\log(s) + \psi^{(0)}(a)^2 + 2\gamma\psi^{(0)}(a) + \log^2(s) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\gamma\log(s) + \gamma^2 \right) - \frac{s^2(-\psi^{(0)}((a-1)s+1) + \psi^{(0)}(a) + \log(s))^2}{s-1} \right\}$$

$$\mathbf{g}_{\alpha\beta} =$$

$$\left\{ \frac{s(-\psi^{(0)}((a-1)s+1) + \psi^{(0)}(a) + \log(s))}{b} \right. \\ \left. - \frac{s(-H_{(a-1)s}) + H_{(a-1)s} + s\psi^{(0)}(a) - \psi^{(0)}(a) + \gamma s + s\log(s) - \log(s) - \gamma + 1}{b} \right\}$$

$$\mathbf{g}_{\beta\beta} =$$

$$\left\{ \frac{s(-\psi^{(0)}((a-1)s+1) + \psi^{(0)}(a) + \log(s))}{b} \right. \\ \left. - \frac{s(-H_{(a-1)s}) + H_{(a-1)s} + s\psi^{(0)}(a) - \psi^{(0)}(a) + \gamma s + s\log(s) - \log(s) - \gamma + 1}{b} \right\}$$

Referências Bibliográficas

- Anscombe, F. J. (1948). THE TRANSFORMATION OF POISSON, BINOMIAL AND NEGATIVE-BINOMIAL DATA, *Biometrika* **35**(3-4): 246–254.
- Assis, V. C., Salvadeo, D. H. P., Mascarenhas, N. D. A. & Levada, A. L. M. (2015). Double noise filtering in ct: Pre- and post-reconstruction, *2015 28th SIBGRAPI Conference on Graphics, Patterns and Images*, pp. 313–320.
- Bauschke, H. H. & Borwein, J. M. (1996). On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.* **38**(3): 367–426.
- Bindilatti, A. A. & Mascarenhas, N. D. A. (2013). A nonlocal poisson denoising algorithm based on stochastic distances, *IEEE Signal Processing Letters* **20**(11): 1010–1013.
- Bindilatti, A. A., Vieira, M. A. & Mascarenhas, N. D. (2018). Poisson wiener filtering with non-local weighted parameter estimation using stochastic distances, *Signal Process.* **144 C**: 68–76.
- Buades, A., Coll, B. & Morel, J.-M. (2005). A review of image denoising algorithms, with a new one, *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation* **vol. 4**: 490–530.
- Dabov, K., Foi, A., Katkovnik, V. & Egiazarian, K. (2007). Image denoising by sparse 3-d transform-domain collaborative filtering, *IEEE Transactions on Image Processing* **16**(8): 2080–2095.
- Deledalle, C.-A. (2011). *Image denoising beyond additive Gaussian noise Patch-based estimators and their application to SAR imagery*, Phd. thesis, Télécom ParisTech.
- Deledalle, C., Tupin, F. & Denis, L. (2010). Poisson nl means: Unsupervised non local means for poisson noise, *Proceeding of the International Conference on Image Processing* pp. 801 – 804.
- Elbakri, I. A. & Fessler, J. A. (2003). Efficient and accurate likelihood for iterative image reconstruction in x-ray computed tomography, in M. Sonka & J. M. Fitzpatrick (eds), *Medical Imaging 2003: Image Processing*, Vol. 5032, pp. 1839–1850.
- Evangelista, R. C. (2017). *Abordagens bayesianas não-locais para filtragem de ruído*

poisson em imagens tomograficas com baixas taxas de contagem utilizando distâncias estocásticas, Master's thesis, Centro Universitário de Campo Limpo Paulista - UNIFACCAMP.

- Fan, Y., Lu, H., Zhu, H., Tang, X. & Liang, Z. (2010). An exact modeling of signal statistics in energy-integrating x-ray computed tomography, *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering* pp. 97–.
- Geraldo, R. J., Cura, L. M. V., Cruvinel, P. E. & Mascarenhas, N. D. A. (2017). Low dose ct filtering in the image domain using map algorithms, *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences* **1**(1): 56–67.
- Granato, L. F., Cruvinel, P. E., Cassaro, F. & Crestana, S. (1998). A technique for improvement of linear attenuation coefficient maps obtained by means of x-ray tomography in multiple energies, *Proceedings SIBGRAPI'98. International Symposium on Computer Graphics, Image Processing, and Vision (Cat. No.98EX237)*, pp. 62–68.
- Gu, R. & Dogandžić, A. (2016). Blind x-ray ct image reconstruction from polychromatic poisson measurements, *IEEE Transactions on Computational Imaging* **2**(2): 150–165.
- Idris A. Elbakri, J. A. F. (2003). Efficient and accurate likelihood for iterative image reconstruction in x-ray computed tomography.
- Leng, K. (2017). An improved non-local means algorithm for image denoising, pp. 149–153.
- Liang, J. Z., Riviere, P. J. L., Fakhri, G. E., Glick, S. J. & Siewerdsen, J. (2017). Guest editorial low-dose ct: What has been done, and what challenges remain?, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **36**(12): 2409–2416.
- Liang, J. Z. et al. (2017). Guest editorial low-dose ct: What has been done, and what challenges remain?, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **36**(12): 2409–2416.
- Mallat, S. (2008). *A Wavelet Tour of Signal Processing, Third Edition: The Sparse Way*, 3rd edn, Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA.
- Mascarenhas, Nelson, S. L. Santos, Saulo & Cruvinel, Paulo (1996). The use of map estimation techniques in the tomographic reconstruction of poisson noise corrupted images, *Anais do IX SIBGRAPI* pp. 197–204.
- Menéndez, M. L., Morales, D., Pardo, L. & Salicrú, M. (1997). (h, Φ) -entropy differential metric, *Applications of Mathematics* **42**(2): 81–98.

- Naranjo-Torres, J., Gambini, J. & Frery, A. C. (2017). The geodesic distance between \mathcal{G}_i^0 models and its application to region discrimination, *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* **10**(3): 987–997.
- Pereira, M. & Cruvinel, P. (2015). A model for soil computed tomography based on volumetric reconstruction, wiener filtering and parallel processing, *Comput. Electron. Agric.* **111**(C): 151–163.
- Pinheiro, A. M. (2017). *Filtragem de sinograma tomográfico afetado por ruído poisson utilizando wavelets anisotrópicas*, Master's thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS.
- Rao, C. R. (1945). Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters, *Bulletin of Calcutta Mathematical Society* **37**(3): 81–91.
- Rehman, A. & Wang, Z. (2011). Ssim-based non-local means image denoising, *2011 18th IEEE International Conference on Image Processing*, pp. 217–220.
- Ribeiro, E. S. (2010). *Novas propostas em filtragem de projeções tomográficas sob ruído poisson*, Master's thesis, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS.
- Rosenfeld, A. & Kak, A. C. (1982). *Digital Picture Processing*, 2nd edn, Academic Press, Inc., Orlando, FL, USA.
- Russ, J. C. & Neal, F. B. (2015). *The Image Processing Handbook*, 7th edn, CRC Press, Inc.
- Salicrú, M., Menéndez, M., Morales, D. & Pardo, L. (1993). Asymptotic distribution of (h, ϕ) -entropies, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **22**(7): 2015–2031.
- Salina, F. V. & Mascarenhas, N. D. A. (2005). A hybrid estimation theoretic-pocs method for tomographic image reconstruction, *XVIII Brazilian Symposium on Computer Graphics and Image Processing (SIBGRAP'05)*, pp. 220–224.
- Salvadeo, D., Mascarenhas, N. & Levada, A. (2016). Nonlocal markovian models for image denoising, *Journal of Electronic Imaging* **25**: 013003.
- Santos, C. A. N. (2017). *Redução de ruído speckle em imagens de ultrassom com filtragem não-local e distâncias estocásticas*, PhD thesis, Universidade Federal de São Carlos.
- Santos, C. A. N. & Mascarenhas, N. D. A. (2019). Geodesic distances in probabilistic spaces for patch-based ultrasound image processing, *IEEE Transactions on Image Processing* **28**(1): 216–226.

- Savage, N. (2010). Medical imagers lower the dose, *IEEE Spectrum* **47**(3): 14–16.
- Šmídl, V., Smidl, V. & Quinn, A. (2006). *The Variational Bayes Method in Signal Processing*, Signals and Communication Technology, Springer.
- Wang, Z., Bovik, A. C., Sheikh, H. R. & Simoncelli, E. P. (2004). Image quality assessment: from error visibility to structural similarity, *IEEE Transactions on Image Processing* **13**(4): 600–612.
- Webb, A. & Copsey, K. (2011). *Statistical Pattern Recognition*, Wiley.
- Whiting, B. R. (2006). Properties of preprocessed sinogram data in x-ray computed tomography, *Medical Physics* **33**: 3290.
- Wiener, N. (1949). *Extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series: with engineering applications*, Technology press books in science and engineering, Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology.
- Wood, D. E., Kazerooni, E. A., Baum, S. L., Eapen, G. A., Ettinger, D. S., Hou, L., Jackman, D. M., Klippenstein, D., Kumar, R., Lackner, R. P., Leard, L. E., Lennes, I. T., Leung, A. N., Makani, S. S., Massion, P. P., Mazzone, P., Merritt, R. E., Meyers, B. F., Midthun, D. E., Pipavath, S., Pratt, C., Reddy, C., Reid, M. E., Rotter, A. J., Sachs, P. B., Schabath, M. B., Schiebler, M. L., Tong, B. C., Travis, W. D., Wei, B., Yang, S. C., Gregory, K. M. & Hughes, M. (2018). Lung cancer screening, version 3.2018, nccn clinical practice guidelines in oncology, *Journal of the National Comprehensive Cancer Network* **16**(4): 412–441.
- Xing, Y., Rong, J., Lu, H., Zhang, H. & Liang, Z. (2017). Ultralow dose ct image reconstruction with pre-log shifted-poisson model and texture-based mrf prior, *The 14th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Vol. 14, Fully3D Community, pp. 254–258.
- Youla, D. C. & Webb, H. (1982). Image restoration by the method of convex projections: Part 1 theory, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **1**(2): 81–94.
- Zhang, H., Wang, J., Zeng, D., Tao, X. & Ma, J. (2018). Regularization strategies in statistical image reconstruction of low-dose x-ray ct: A review, *Medical physics* **45**(10): e886—e907.
- Zhang H. et al. (2017). Applications of nonlocal means algorithm in low-dose x-ray ct image processing and reconstruction: A review., *Med Phys.* **44**(3): 1168–1185.

Zhong, H., Li, Y. & Jiao, L. (2011). Sar image despeckling using bayesian nonlocal means filter with sigma preselection, *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* **8**(4): 809–813.

Bayesian Tomographic Reconstruction at Low Counting Rates Using Geodesic Distances

Journal:	<i>IEEE Signal Processing Letters</i>
Manuscript ID	Draft
Manuscript Type:	Letter
Date Submitted by the Author:	n/a
Complete List of Authors:	Góes, Daniel; Centro Universitário Campo Limpo Paulista (UNIFACCAMP), Master's Program in Computer Science Mascarenhas, Nelson; Federal University of São Carlos, Computer Department; Centro Universitário Campo Limpo Paulista (UNIFACCAMP), Master's Program in Computer Science
EDICS:	IMD-ANAL Image/video analysis, restoration and processing < IMD Image and multidimensional signal processing, BIO-COMPIM Computational imaging < BIO BIO Biomedical signal processing

Bayesian Tomographic Reconstruction at Low Counting Rates Using Geodesic Distances

Daniel A. Góes, and Nelson D. A. Mascarenhas, *Life Senior Member, IEEE*

Abstract—Low-dose computed tomography (LDCT) is motivated by concerns related to X-ray exposure. When reducing the exposure time, the image may be badly degraded by noise. One of the strategies is to use adaptations of Non-Local Means for filtering. The NLM algorithm filters an image using a non-local average weighted by a function of the Euclidean distance between two patches of the image. Since geodesic distances induce a metric for dissimilarity between two distributions, they can be used to compare two patches of an image. This paper alters the NLM for usage in sinogram denoising by changing the distance metric with a geodesic one that is more representative for the Poisson noise that sinograms from LDCT are subject to. Among the geodesic distances evaluated, we found a closed solution for the Shannon entropy for Gamma distributions. Comparisons are made with other NLM strategies as well as state-of-the-art methods, achieving competitive results.

Index Terms—Low-dose CT, sinogram denoising, Poisson noise, geodesic distances.

1 INTRODUCTION

RECENTLY, there has been a great concern in the medical community with the amount of radiation a patient undergoes in computed tomography [1]. Simply reducing the exposure time implies a loss of quality of the reconstructed image. Therefore, it is necessary to adopt procedures for filtering noise.

The proposal of this work is to filter the noise in the sinogram domain of low-dose CT images. In this domain, the tomographic data acquisition process is performed through the photon counting and the noise is modeled by a Poisson probability distribution [2]. In a sinogram corrupted by Poisson noise, the noise variance is equal to the average rate of photons, so the noise is signal-dependent [3].

The Nonlocal Means (NLM) algorithm proposed by Buades et al. [4] introduces a new method for filtering noisy images with a nonlocal principle that is efficient in filtering additive Gaussian noise. Patches of the image are compared using Euclidean distance through a Gaussian kernel.

Stochastic geodesic distances can be used to compare patches in an image [5]. Santos and Mascarenhas [6] have used this approach to filter ultrasound data.

This work adapts the NLM algorithm for Poisson noise filtering with a Bayesian approach, using the conjugated Poisson and Gamma distributions and geodesic stochastic distances for the Gamma distribution. Furthermore, the proposed filters are compared with state-of-the-art filters of the literature, with competitive results.

This paper is organized as follows. Section II presents the theoretical foundation for this work describing the ideas and methods used. Section III focus on geodesic distances, Sec-

tion IV explains how the images were reconstructed and evaluated with their results in Section V. The conclusions are in Section VI.

2 THEORETICAL FOUNDATION

2.1 Non-Local Means

Given a noisy image $Y = \{y_i | i \in I\}$, resulting from the degradation of an original, noise-free image $X = \{x_i | i \in I\}$, the algorithm proposed by Buades et al. [4] seeks to obtain an estimate $\hat{X} = \{\hat{x}_i | i \in I\}$ of the original image X , computing \hat{x}_i through a weighted average between the pixels of the image Y .

$$\hat{x}_i = \frac{1}{w_i} \sum_{j \in B(i,r)} w_{ij} y_j \quad (1)$$

where $0 \leq w_{ij} \leq 1$, $w_i = \sum_{j \in B(i,r)} w_{ij}$ and $B(i,r)$ indicates the search window centered at i , of r size. As stated by Salmon [7], search windows with up to 15×15 in size guarantee good results. The weights w_{ij} of the filter are dependent on the Euclidean distance between values of the neighborhood pixels within i and j . The neighborhood of a pixel or similarity window is defined by a square window around the pixel to be estimated, and the size of this window can vary. The weights w_{ij} are calculated as follows:

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{h^2} \|y_i - y_j\|_{2,a}^2\right) \quad (2)$$

where h is a parameter that controls the strength of the filter and y_i and y_j are $|P|$ -dimensional vectors of the neighborhoods centered on i and j .

The parameter h controls the intensity of the filter. When the value of h tends to zero ($h \rightarrow 0$), the image approaches the original noisy image and when it tends to infinity ($h \rightarrow \infty$), the filter has results similar to a mean filter.

- D. A. Góes is with the Master's Program in Computer Science, Centro Universitário Campo Limpo Paulista (UNIFACCAMP), Campo Limpo Paulista 13231-230, Brazil.
- N. D. A. Mascarenhas is with the Computing Department, Federal University of São Carlos, São Carlos 13565-905, Brazil, and also with the Master's Program in Computer Science, Centro Universitário Campo Limpo Paulista (UNIFACCAMP), Campo Limpo Paulista 13231-230, Brazil.

The expression $\|y_i - y_j\|_{2,a}^2$ represents the weighted Euclidean distance using a Gaussian Kernel with standard deviation a . In this work, this distance will be replaced by geodesic distances through a Bayesian approach.

2.2 The Bayesian Approach and Conjugate Distributions: Poisson and Gamma

The aim of this paper is to develop a Bayesian approach for filtering sinograms of CT images, which represents the set of projections. The general expression for the Bayes rule is given by:

$$Pr(X|Y) = \frac{Pr(Y|X)Pr(X)}{Pr(Y)} \quad (3)$$

As noted, samples in the sinogram follow the Poisson distribution. Thus, the likelihood $Pr(Y|X)$ in the Bayesian expression is the Poisson distribution. To obtain the posteriori distribution we should, in principle, obtain the expression of the denominator of the Bayes expression, which in general is not a trivial task. For the general case, one must rely on numerical techniques such as Markov Chain Monte Carlo or Variational methods [8] [9], which would make our method computationally not feasible, as these procedures would have to be repeated for each position in the similarity window.

The adoption of a conjugate prior distribution $Pr(X)$ to the Poisson distribution is then necessary, obtaining the a posteriori distribution of the same type of the a priori distribution. In the Poisson case, this conjugate is the Gamma distribution and, as discussed below, the alpha and beta hyperparameters that define the Gamma a posteriori distribution are easily obtained from the corresponding parameters of the gamma a priori distribution.

Moreover, the adoption of the gamma a priori distribution for non-negative sinogram counting rates is also physically convenient, since the Gamma distribution is not defined in the negative half-line.

2.2.1 Parameter Estimation

For a priori Gamma distribution parameters α and β are estimated through the method of moments from the mean and variance within a set window size. $\alpha = \mu^2/var$ and $\beta = \mu/var$.

The parameters $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ for the posteriori distribution, used in the denoising process, are also estimated through the method of moments as follows:

$$\hat{\alpha} = \alpha + \sum_{i=1}^n y_i \quad (4)$$

$$\hat{\beta} = \beta + n \quad (5)$$

3 GEODESIC DISTANCES

Geodesic distance is the shortest path between two points through a surface. Rao [10] described the parametric space of a probability distribution as a Riemannian manifold and derived a metric for that topology using the Kullback–Leibler divergence.

Menéndez et al. [11] present a general method to generate geodesic distances based on the Hessian of a (h, ϕ) -entropy introduced by Salicrú et al. [12]. The entropy associated with a distribution, $f_P(x; \theta)$, is given by:

$$H_\phi^h = h \left[\int_I \phi(f_P(x; \theta)) dx \right] \quad (6)$$

Table 1 presents the (h, ϕ) -entropies used in this work.

TABLE 1: (h, ϕ) -entropies and their respective $h(x)$, $\phi(x)$ functions

(h, ϕ) -entropy	$h(x)$	$\phi(x)$
Arimoto	$(x^s - 1)/(s - 1)$	$x^{\frac{1}{s}}, s > 0, s \neq 1$
Havrda-Charvát	x	$(x^s - x)/(s - 1), s > 0, s \neq 1$
Rényi	$\log(x)/(s - 1)$	$x^s, s > 0, s \neq 1$
Shannon	x	$-x \log(x)$
Tsallis	$(x - 1)/(s - 1)$	$x^s, s > 0, s \neq 1$

Let P be a random variable with probability density given by $f_P(x; \theta)$, with support interval I , where $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ is the parameter vector. The geodesic distance between points θ_a and θ_b in the parametric space H_ϕ^h is given by [11]:

$$d(\theta_a, \theta_b) = \left| \int_{\theta_a}^{\theta_b} \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M g_{ij}(\theta) d\theta_i d\theta_j \right]^{\frac{1}{2}} \right| \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} g_{ij}(\theta) = & h'' \left[\int_I \phi(f_P(x; \theta)) dx \right] \int_I \phi'(f_P(x; \theta)) \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_i} dx \\ & \times \int_I \phi'(f_P(x; \theta)) \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_j} dx \\ & + h' \left[\int_I \phi(f_P(x; \theta)) dx \right] \\ & \times \int_I \phi''(f_P(x; \theta)) \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial f_P(x; \theta)}{\partial \theta_j} dx \end{aligned} \quad (8)$$

3.1 Shannon geodesic distance for Gamma distribution

For the Gamma distribution, it was only possible to find the expression of $d(\theta_a, \theta_b)$ for the Shannon entropy. It is given by:

$$\begin{aligned} d(\theta_1, \theta_2) = & \left| (\beta_1 - 2\alpha_1 \log(\beta_1) - \beta_1 \log(\beta_1) + \log \Gamma(\alpha_1))^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. - (\beta_2 - 2\alpha_2 \log(\beta_2) - \beta_2 \log(\beta_2) + \log \Gamma(\alpha_2))^{\frac{1}{2}} \right| \end{aligned} \quad (9)$$

For others, it was possible to calculate the $g_{ij}(\theta)$ terms, so numerical integration was used to compute $d(\theta_a, \theta_b)$. Of note is that the entropies of Havrda-Charvát and Tsallis generate the same geodesic distances for Gamma distribution.

Consequently, in the geodesic NLM the weights w_{ij} are changed for these distances.

$$w_{ij} = \exp\left(\frac{-\sum_P d(\theta_{i-q}, \theta_{j-q})}{h^2}\right) \quad (10)$$

where P denotes the pixels in a similarity window and θ_{i-q} the parameters of the pixel in location q of the neighborhood centered on i .

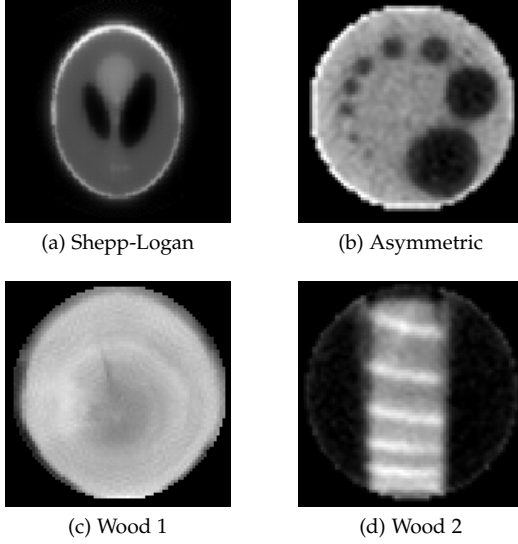


Fig. 1: Noise-Free Reference Images Set (POCS)

4 RECONSTRUCTION AND IMAGE EVALUATION

Once the sinogram is filtered, the images will be reconstructed by the Filtering-Back Projection (FBP) and Projection onto Convex Sets (POCS) algorithms. We reconstruct the phantom images of Shepp-Logan (simulating a section of the human brain), as well as three real phantoms, for a total of four images. The noisy real images were obtained with three seconds of exposure per point in the projections, while the twenty seconds per point exposure were considered as the original noise-free images. These images are shown on Figure 1.

The quality evaluation of the reconstructed images is obtained by reference indexes PSNR and SSIM since the original noise-free images are available. The results are also compared with the following methods: Non-Local Means after an Anscombe transform (NLM), P-NLM [13], an adapted version of NLM for Poisson noise, BM3D [14] also after the Anscombe transform and Bindilatti and Mascarenhas' [15] Stochastic Poisson NLM (SPNLM) for the stochastic distances of Bhattacharyya, Hellinger, Kullback-Leibler, and Rényi.

For our proposed method and the other NLM based methods, the sinograms were filtered with different parameters values. The search window size varied from 5×5 through 15×15 . The similarity window size varied from 5×5 to the search window size. Except for the SP-NLM methods, which sets the value of h automatically, on the Shepp-Logan phantom the h parameter varied from 0.20 to 0.60 in 0.05 intervals, on the other phantoms this parameter varied from 0.10 to 0.50 with 0.05 intervals.

5 RESULTS

As stated, we evaluate using both FBP and POCS reconstruction methods and the results are always better with POCS, although the filtered images lose sharpness when compared to FBP, for all filtering methods.

Overall, all the geodesic distances performed very similarly, with each having better results in different metrics.

Considering the P-NLM method, it yielded the best results on PSNR for FBP reconstruction for the Shepp-Logan and had comparable results with our method for PSNR in POCS reconstruction. It also had similar overall results to our method for PSNR for FBP reconstruction for the Wood 2 reconstruction.

TABLE 2: Shepp-Logan Results

Method	FBP		POCS	
	PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Noisy	14.51	0.25	20.22	0.62
Shannon	20.98	0.76	20.74	<u>0.89</u>
Shannon	20.45	0.72	<u>22.11</u>	0.88
Arimoto $s = 1.1$	<u>21.14</u>	0.81	20.46	0.90
Arimoto $s = 1.1$	20.40	0.72	22.14	0.88
Havrda Charvát $s = 0.8$	21.09	0.77	20.76	<u>0.89</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	20.43	<u>0.80</u>	21.68	0.90
Rényi $s = 0.1$	21.07	0.77	20.81	<u>0.89</u>
Rényi $s = 0.1$	20.46	<u>0.80</u>	21.67	0.90
NLM	19.40	0.49	21.86	0.81
P-NLM	21.20	0.72	20.86	0.88
SP-NLM Bhattacharyya	18.57	0.69	17.70	0.81
SP-NLM Bhattacharyya	17.28	0.70	18.11	0.85
SP-NLM Hellinger	18.71	0.72	17.67	0.83
SP-NLM Hellinger	17.09	0.69	18.00	0.85
SP-NLM KL	18.84	0.73	17.64	0.84
SP-NLM KL	17.82	0.71	18.33	0.86
SP-NLM Rényi	18.68	0.70	17.69	0.82
SP-NLM Rényi	17.55	0.71	18.16	0.85
BM3D	21.00	0.81	21.30	<u>0.89</u>

TABLE 3: Asymmetric Results

Method	FBP		POCS	
	PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Noisy	16.52	0.52	24.27	0.85
Shannon	20.89	0.69	28.85	<u>0.91</u>
Arimoto $s = 1.1$	21.18	<u>0.70</u>	28.93	<u>0.91</u>
Arimoto $s = 1.1$	21.04	<u>0.70</u>	29.11	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	<u>21.24</u>	0.70	29.04	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	21.19	<u>0.70</u>	<u>29.15</u>	<u>0.91</u>
Rényi $s = 0.1$	21.16	<u>0.70</u>	29.00	<u>0.91</u>
Rényi $s = 0.1$	21.03	<u>0.70</u>	<u>29.15</u>	<u>0.91</u>
NLM	20.10	0.67	26.87	0.90
P-NLM	20.81	0.68	28.46	0.90
P-NLM	20.47	0.65	28.85	0.90
SP-NLM Bhattacharyya	20.17	0.65	26.53	0.89
SP-NLM Hellinger	18.78	0.62	23.92	0.88
SP-NLM KL	20.78	0.69	28.72	<u>0.91</u>
SP-NLM Rényi	20.72	0.67	28.32	0.90
BM3D	21.46	0.72	29.67	0.92

In all other instances our proposed methods outperformed the other methods based on NLM. In the tables, the best results are indicated in bold, while the second best results are indicated by underline.

In comparison with BM3D, our method achieved better results in Shepp-Logan in POCS (both PSNR and SSIM). In FBP our methods got better PSNR values for Wood 1 and Wood 2.

TABLE 4: Wood 1 Results

Method	FBP		POCS	
	PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Noisy	21.91	0.68	34.08	0.91
Shannon	<u>30.63</u>	0.83	37.40	<u>0.96</u>
Shannon	29.98	0.84	37.72	0.97
Arimoto $s = 1.1$	29.11	<u>0.83</u>	38.46	<u>0.96</u>
Arimoto $s = 1.1$	29.03	<u>0.84</u>	37.63	0.97
Havrda Charvát $s = 0.8$	30.69	0.83	37.86	<u>0.96</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	29.43	<u>0.84</u>	38.12	0.97
Rényi $s = 0.1$	29.61	<u>0.84</u>	37.64	0.97
Rényi $s = 0.1$	29.06	0.82	38.48	<u>0.96</u>
NLM	28.44	0.82	37.75	<u>0.96</u>
P-NLM	28.38	0.78	37.06	<u>0.96</u>
P-NLM	27.38	0.81	37.46	<u>0.96</u>
SP-NLM Bhattacharyya	23.32	0.70	21.38	0.92
SP-NLM Hellinger	21.10	0.63	20.21	0.88
SP-NLM KL	23.02	0.69	20.87	0.92
SP-NLM Rényi	22.94	0.69	20.78	0.92
BM3D	29.25	0.85	38.75	0.97

TABLE 5: Wood 2 Results

Method	FBP		POCS	
	PSNR (dB)	SSIM	PSNR (dB)	SSIM
Noisy	19.88	0.56	21.66	0.69
Shannon	25.89	0.66	<u>30.86</u>	0.90
Arimoto $s = 1.1$	26.21	0.67	30.00	0.89
Arimoto $s = 1.1$	24.95	0.67	29.72	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	26.39	<u>0.68</u>	29.50	0.90
Havrda Charvát $s = 0.8$	24.96	<u>0.68</u>	29.45	<u>0.91</u>
Havrda Charvát $s = 0.8$	25.93	0.65	30.62	0.89
Rényi $s = 0.1$	<u>26.23</u>	0.67	30.28	0.90
Rényi $s = 0.1$	25.70	0.64	30.45	0.89
NLM	24.64	<u>0.68</u>	28.23	0.87
NLM	23.89	0.66	28.55	0.88
P-NLM	25.76	0.67	30.79	0.90
P-NLM	25.10	0.65	30.45	<u>0.91</u>
SP-NLM Bhattacharyya	18.01	0.47	22.37	0.74
SP-NLM Hellinger	18.02	0.46	22.25	0.73
SP-NLM KL	18.00	0.47	22.41	0.74
SP-NLM Rényi	18.01	0.47	22.37	0.74
BM3D	24.80	0.72	31.43	0.92

6 CONCLUSION

In this paper we considered the use of statistical geodesic distances as a metric of similarity substituting the Euclidean distance in the standard NLM algorithm. We also adopted a

Bayesian approach. We applied this strategy in the context of sinogram denoising for low-dose CT.

For mathematical simplification, in this Bayesian approach, it was considered that the original noise-free sinogram follows a Gamma distribution since it is the conjugate of the Poisson distribution, used for modeling the noise. Our results show that this approach yields satisfactorily good results, with the usage of geodesic distances achieving overall better results than P-NLM and outperforming standard NLM in Anscombe domain and SP-NLM in all conditions, as well as comparable results to Anscombe domain BM3D.

We also found a closed solution for a geodesic distance between Gamma distributions using the Shannon (h, ϕ) -entropy. To our knowledge, this is the first time a closed form solution for a geodesic distance between two Gamma models is derived.

For future work, the proposed method could be altered so that the h parameter (present in equation 2) is not a global value but would vary with the amount of noise estimated at the pixel being denoised. This approach would be similar to the one proposed by Li et al. [16].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Doctor Paulo Estevão Cruvinel of EMBRAPA-CNPq who provided the real phantoms data used in this work. The work of N. D. A. Mascarenhas was supported by CNPq, Brazil, through a scholarship under Grant Process 306742/2017-9.

REFERENCES

- [1] N. Savage, "Medical imagers lower the dose," *IEEE Spectrum*, vol. 47, no. 3, pp. 14–16, 2010.
- [2] J. Z. Liang, P. J. L. Riviere, G. E. Fakhri, S. J. Glick, and J. Siewerdsen, "Guest editorial low-dose ct: What has been done, and what challenges remain?" *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 36, no. 12, pp. 2409–2416, Dec 2017.
- [3] M. Bertero, P. Boccacci, G. Talenti, R. Zanella, and L. Zanni, "A discrepancy principle for Poisson data," *Inverse Problems*, vol. 26, no. 10, p. 105004, 2010.
- [4] A. Buades, B. Coll, and J.-M. Morel, "A review of image denoising algorithms, with a new one," *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation*, vol. 4, pp. 490–530, 2005.
- [5] J. Naranjo-Torres, J. Gambini, and A. C. Frery, "The geodesic distance between \mathcal{G}_i^0 models and its application to region discrimination," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 10, no. 3, pp. 987–997, 2017.
- [6] C. A. N. Santos and N. D. A. Mascarenhas, "Geodesic distances in probabilistic spaces for patch-based ultrasound image processing," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 28, no. 1, pp. 216–226, Jan 2019.
- [7] J. Salmon, "On two parameters for denoising with non-local means," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 17, no. 3, pp. 269–272, 2010.
- [8] A. Webb and K. Copey, *Statistical Pattern Recognition*. Wiley, 2011.
- [9] V. Šmídl, V. Šmídl, and A. Quinn, *The Variational Bayes Method in Signal Processing*, ser. Signals and Communication Technology. Springer, 2006.
- [10] C. R. Rao, "Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters," *Bulletin of Calcutta Mathematical Society*, vol. 37, no. 3, pp. 81–91, 1945.
- [11] M. L. Menéndez, D. Morales, L. Pardo, and M. Salicrú, " (h, Φ) -entropy differential metric," *Applications of Mathematics*, vol. 42, no. 2, pp. 81–98, 1997.
- [12] M. Salicrú, M. Menéndez, D. Morales, and L. Pardo, "Asymptotic distribution of (h, ϕ) -entropies," *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 22, no. 7, pp. 2015–2031, 1993.

- [13] C. Deledalle, F. Tupin, and L. Denis, "Poisson nl means: Unsupervised non local means for poisson noise," *Proceeding of the International Conference on Image Processing*, pp. 801 – 804, 2010.
- [14] K. Dabov, A. Foi, V. Katkovnik, and K. Egiazarian, "Image denoising by sparse 3-d transform-domain collaborative filtering," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, no. 8, pp. 2080–2095, 2007.
- [15] A. A. Bindilatti and N. D. A. Mascarenhas, "A nonlocal poisson denoising algorithm based on stochastic distances," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 11, pp. 1010–1013, Nov 2013.
- [16] Z. Li, L. Yu, J. D Trzasko, D. S Lake, D. J Blezek, J. Fletcher, C. H McCollough, and A. Manduca, "Adaptive non-local means filtering based on local noise level for ct denoising," *Medical Physics*, vol. 41, p. 011908, Jan 2014.