Otimização de portfólios com estratégias de Rastreamento de Índice Aprimorado e Paridade de Risco com Esparsidade

Alessandro Soares Borges Leite

Março / 2019

Dissertação de Mestrado em Ciência da Computação

Otimização de portfólios com estratégias de Rastreamento de Índice Aprimorado e Paridade de Risco com Esparsidade

Este documento corresponde à dissertação apresentada à Banca Examinadora para a defesa de Mestrado em Ciência da Computação do Centro Universitário Campo Limpo Paulista - UNIFACCAMP.

Campo Limpo Paulista, 01 de Março de 2019.

Alessandro Soares Borges Leite

Profa. Dra. Marta Ines Velazco Fontova
(Orientadora)

FICHA CATALOGRÁFICA

Ficha catalográfica elaborada pela

Biblioteca Central da UNIFACCAMP

L55o

Leite, Alessandro Soares Borges

Otimização de portfólios com estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade / Alessandro Soares Borges Leite. Campo Limpo Paulista, SP: UNIFACCAMP, 2019.

Orientadora: Profª. Drª. Marta Ines Velazco Fontova

Dissertação (Programa de Mestrado em Ciência da Computação) – Centro Universitário Campo Limpo Paulista – UNIFACCAMP.

1. Rastreamento de índice. 2. Rastreamento de índice aprimorado. 3. Paridade de risco. 4. Portfólios esparsos. 5. Esparsidade. 6. Otimização de portfólios. I. Velazco Fontova, Marta Ines. II. Campo Limpo Paulista. III. Título.

CDD – 658.15

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha esposa Flavia, pois esteve presente em todos os momentos em que mais precisei e sempre foi a minha inspiração para chegar nesta etapa final.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha esposa pelo apoio, força e incentivo desde o início desta jornada. Agradeço novamente à minha esposa, mas desta vez também à minha enteada pela compreensão nos momentos de ansiedade, angústia e também de ausência durante todo o período do mestrado.

Aos meus pais, por sempre investirem em meus estudos e também por sempre me incentivarem a buscar o crescimento pessoal e profissional através do conhecimento.

À minha orientadora Profa. Dra. Marta Ines Velazco Fontova, pela paciência, dedicação, profissionalismo e conhecimento técnico que muito me ajudaram na conclusão desta importante fase em minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Wanderlei Lima de Paulo, por toda disponibilidade e colaboração.

À empresa onde trabalho, Oracle do Brasil Sistemas Ltda, pela confiança e reconhecimento, patrocinando o meu programa de mestrado.

A todos os professores, em especial à Profa. Dra. Ana Maria Monteiro, e colegas da UNIFACCAMP, em especial ao Gregory Acacio Seibert Oliveira, pela inspiração e contribuição para meu crescimento pessoal, acadêmico e profissional.

Resumo: *Este trabalho apresenta um novo modelo de otimização de portfólios em que as estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco são usadas em conjunto. O resultado será um portfólio, em que os retornos superarão os índices de mercado e simultaneamente, todos os ativos terão a mesma contribuição de risco. Porém, isto pode resultar em altos custos transacionais e na diminuição do retorno geral esperado, pois se investe em todos os ativos disponíveis. Para superar estas desvantagens, será usado um método que permite distribuir o capital em um subconjunto de ativos de tal forma que o risco seja o mesmo para todos os selecionados. O modelo e a solução proposta serão avaliados utilizando dados de ativos disponíveis na BM&FBOVESPA (bolsa de valores do Brasil) e S&P 500 (índice do mercado acionário americano), de um período de aproximadamente 5 anos. A análise final do resultado será a partir de gráficos e tabelas, onde temos cenários comparativos envolvendo três casos: estratégia de rastreamento de índice aprimorado (Caso 1), estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco sem esparsidade (Caso 2) e estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade (Caso 3 - solução proposta); todos usando como referência o índice do mercado (benchmark portfólio). Neste trabalho, não será verificada a performance do método ou algoritmo. A validação será feita desde o ponto de vista financeiro.*

Palavras-chave: *Rastreamento de Índice; Rastreamento de Índice Aprimorado; Paridade de Risco; Portfólios Esparsos; Esparsidade; Otimização de Portfólios.*

Linha de Pesquisa: *Pesquisa Operacional.*

Abstract: *This paper presents a new portfolio optimization model in which the enhanced index tracking and risk parity strategies are used together. The result will be a portfolio, which its returns will overcome the market indexes and simultaneously, which has the same risk contribution for all the assets from this portfolio. However, this can result in high transaction costs and in a decrease of the expected overall return, as it is invested in all the available assets. To overcome these disadvantages, it will be used a method that allows the distribution of the capital in a subset of assets in such a way that the risk is the same for all these selected assets. The model and proposed solution will be evaluated using available assets data from BM&FBOVESPA (stock exchange in Brazil) and S&P 500 (american stock market index) of a 5 years period approximately. The final analysis of the result will be based on graphs and tables, where we have comparative scenarios involving three cases: enhanced index tracking strategy (Case 1), non-sparse enhanced index tracking and risk parity strategy (Case 2) and sparse enhanced index tracking and risk parity strategy (Case 3 - proposed solution); all of them using the market index (benchmark portfolio) as reference. In this work, it is not being verified the performance of the method or algorithm. The validation will be done from the financial point of view.*

Keyword: *Index Tracking; Enhanced Index Tracking; Risk Parity; Sparse Portfolios; Sparsity; Portfolio Optimization.*

Line of Research: *Operational Research.*

Sumário

1. Introdução 1

1.1. Trabalhos Relacionados e Revisão Bibliográfica 5

1.1.1. Lista dos Principais Trabalhos Revisados 5

2. Embasamento Teórico 8

2.1. Restrições de um Problema 8

2.2. Convexidade 9

2.3. Problema de Programação Quadrática 10

2.4. Métodos de Solução 12

2.4.1. Método Primal-Dual Seguidor de Caminho 13

2.5. ACS - Aproximação Convexa Sucessiva 14

2.6. Otimização de Portfólios 15

2.6.1. Risco, Retorno e Volatilidade 15

2.6.2. Modelo de Markowitz 17

2.6.3. Fronteira Eficiente 21

2.7. Modelo Paramétrico (Parametrizado) 27

2.8. Rastreamento de Índice 28

2.8.1. Rastreamento de Índice Aprimorado 29

2.8.2. Modelo Matemático da Estratégia Rastreamento de Índice Aprimorado 29

2.9. Paridade de Risco 30

2.9.1. Princípio de Alocação de Euler 33

2.9.2. Modelo Matemático da Estratégia Paridade de Risco 33

2.10. Portfólios Esparsos 35

3. Otimização de portfólios com estratégias de Rastreamento de Índice Aprimorado e Paridade de Risco com Esparsidade 36

3.1. O Problema 36

3.2. Solução do Problema 37

3.2.1. Problema Final 41

3.2.2. Algoritmo de Resolução do Problema Final 42

4. Implementação e Resultados Numéricos 44

4.1. Fonte de Dados 44

4.2. *Softwares* e *Hardware* Utilizados 46

4.3. Resultados 47

5. Conclusão 75

5.1. Trabalhos Futuros 77

6. Referências 78

A Lista de Ativos da BM&FBOVESPA 83

B Lista de Ativos da S&P 500 84

C Base de dados com 10 Ativos da S&P 500 85

D Base de dados com 20 Ativos da BM&FBOVESPA 86

E Base de dados com 40 Ativos da BM&FBOVESPA 88

Glossário

ACS: Aproximação Convexa Sucessiva.

Benchmark Portfolio: Portfólio de referência de mercado.

BM&FBOVESPA: É a principal bolsa de valores do Brasil, sendo localizada em São Paulo. Fundada em 1890, tinha o nome de "Bolsa de Valores de São Paulo", ou Bovespa. Em 2008, uniu-se à BM&F, dando origem ao novo nome e à terceira maior bolsa de valores do mundo.

CMV: Carteira de Mínima Variância.

KKT: Karush-Kuhn-Tucker.

Leverage: Alavancagem.

PL: Programação Linear.

Portfólio: Carteira de Ativos de Investimentos Financeiros.

PQ: Programação Quadrática.

Risk Parity: Paridade de Risco.

RM: Risco Mínimo.

SCA: Successive Convex Approximation.

Short-Selling: Venda a descoberto.

S&P 500: É um índice do mercado acionário americano baseado nas capitalizações de mercado de 500 grandes empresas com ações ordinárias listadas na NYSE, NASDAQ ou na Cboe BZX Exchange.

Trade-Off: Variável ou parâmetro regulador.

Tracking Error: Erro de rastreamento, é a diferença entre o retorno obtido do *tracking portfolio* e do retorno obtido do *benchmark portfolio*.

Tracking Portfolio: Portfólio que será o resultado da implementação.

VaR: Value-at-Risk, Valor-em-Risco.

Lista de Tabelas

1.	Exemplo Portfólio do Modelo de Markowitz.	25
2.	Matriz de Variância/Covariância do Modelo de Markowitz.	25
3.	Características do equipamento utilizado.	47
4	Cenários Analisados.	49
5	Indicadores dos cenários 1 ao 4.	49
6	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 1.	51
7	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 2.	52
8	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 3.	53
9	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 4.	54
10	Indicadores dos cenários 5 ao 8.	55
11	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 5.	57
12	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 6.	59
13	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 7.	61
14	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 8.	63
15	Indicadores dos cenários 9 ao 12.	64
16	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 9.	65
17	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 10.	67
18	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 11.	69
19	Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 12.	71

Lista de Figuras

1	Relação de Risco X Retorno.	16
2	Risco Total X Quantidade de Ativos.	21
3	Exemplo Princípio Dominância.	22
4	Exemplo Fronteira Eficiente de Markowitz.	26
5	Exemplo da Planilha Excel da base de dados da S&P 500 (10 ativos).	46
6	Gráfico do Cenário 1.	50
7	Gráfico do Cenário 2.	51
8	Gráfico do Cenário 3.	53
9	Gráfico do Cenário 4.	54
10	Gráfico do Cenário 5.	56
11	Gráfico do Cenário 6.	58
12	Gráfico do Cenário 7.	60
13	Gráfico do Cenário 8.	62
14	Gráfico do Cenário 9.	64
15	Gráfico do Cenário 10.	66
16	Gráfico do Cenário 11.	68
17	Gráfico do Cenário 12.	70

1. Introdução

Hoje vivemos em um período de transição, onde temos visto o aumento da complexidade e velocidade dos negócios, do tamanho do mercado, das pressões sobre os custos, da concorrência, da velocidade da inovação, das expectativas dos clientes e dos riscos de uma maneira em geral, ao mesmo tempo que temos visto a diminuição dos nichos de oportunidades, dos ciclos de produtos e da exclusividade. Toda essa mudança de paradigma também é refletida no mercado financeiro.

Existem muitas estratégias para alocação de carteiras de ativos de investimentos financeiros (*portfólios*), mas como dito, atualmente os riscos estão cada vez maiores e as oportunidades cada vez menores. Um cenário ideal e perfeito para um investidor, seria a alocação de todos os seus recursos em um portfólio que obtivesse o máximo de retorno com o menor risco possível. Mas a certeza deste cenário ideal e perfeito não existe, ninguém a possui.

Para Silveira (1995), o ambiente de negócios é constituído por um conjunto de fatores complexos e condições que envolvem e influenciam as empresas nas suas decisões. Especificamente, o mercado financeiro é dinâmico, complexo e diversificado; isto dificulta a tomada de decisões na alocação de portfólios. Apesar do dinamismo e complexidade atual do mercado financeiro brasileiro, a bolsa brasileira tem vivido uma grande fase. Segundo um levantamento, Economatica (2017), feito pela empresa de informações financeiras Economatica, o valor de mercado de 18 das principais empresas brasileiras mais que dobrou e 61 ações se valorizaram mais de 50% em 2017. Já em maio de 2018, o mercado à vista da BM&FBOVESPA movimentou em média por dia R$ 12,78 bilhões, que é o melhor resultado histórico. A bolsa não vive uma fase tão positiva desde 2009.

Os preços da bolsa são sempre comandados por expectativas e elas mudaram radicalmente no Brasil. O bom momento que atravessa a bolsa brasileira acentua a necessidade de investimentos e para obter melhores resultados no mercado financeiro, é necessário analisar e ampliar a percepção permitindo visualizar o todo e empregar a melhor estratégia.

Para Porter (2002), estratégia é um caminho ou plano de ação formulado para se alcançar um objetivo específico. O objetivo de qualquer investidor é maximizar os ganhos com o menor risco possível. O mercado de investimentos enfrenta muitos desafios significativos, equilibrá-los pode ser um processo difícil e é aqui onde estas estratégias podem ajudar, desbloqueando o potencial de seus investimentos e deixando os riscos controlados.

As estratégias de investimento estão divididas em estratégias ativas e passivas. Em estratégias ativas, o desempenho do portfólio depende exclusivamente das decisões de investimento tomadas pelo seu gestor, que analisa o mercado e busca as melhores opções disponíveis visando obter resultados melhores que os índices de mercado. Ou seja, a meta das estratégias ativas é ganhar mais que o índice ("bater" o índice). Já na gestão de estratégias passivas, assume-se que os índices de mercado são difíceis de serem superados e, portanto, deve-se acompanhá-los. As estratégias passivas também são conhecidas como estratégias de indexação pelo fato de acompanharem um determinado índice. Sendo assim, temos uma estratégia passiva chamada de rastreamento de índice (*index tracking)* que tem por objetivo construir um portfólio chamado de *tracking portfolio*, cujo retorno acompanhará os índices de referência do mercado (*benchmark portfolio*). *Tracking Error* ou erro de rastreamento é a diferença entre o retorno obtido do *tracking portfolio* e do retorno obtido do *benchmark portfolio*. Portanto, quanto menor for o *tracking error*, mais próximo o retorno do *tracking portfolio* estará do *benchmark portfolio*. Para minimizar o *tracking error* deve-se comprar uma quantidade apropriada de ativos daquele índice.

Uma variação desta estratégia é a estratégia de rastreamento de índice aprimorado (*enhanced index tracking)* que tem por objetivo construir um portfólio cujo retorno superará os índices de referência do mercado. A meta é acompanhar o retorno positivo excessivo acima do índice, ou seja, acompanhar o índice, porém ganhando, pelo menos na média.

Também temos a estratégia paridade de risco (*risk parity*), que tem por objetivo construir um portfólio em que todos os seus ativos terão a mesma contribuição de risco (CR) ou *risk contribution* (RC), mas para que isso aconteça, espera-se que se invista em todos os ativos disponíveis.

A proposta deste trabalho é a definição de um novo modelo de otimização de portfólios em que as estratégias *enhanced index tracking* e *risk parity* serão usadas em conjunto. Consequentemente, teremos um *tracking portfolio* cujo retorno superará os índices de mercado e concomitantemente, todos os ativos que o compõem terão a mesma contribuição de risco. É importante reforçar a relevância da proposta deste trabalho, pois este problema nunca foi abordado e explorado anteriormente, portanto se trata de um problema diferente.

Essas estratégias em conjunto resultam em altos custos de transações, pois se espera investir em muitos ou em todos os ativos disponíveis que compõe o *benchmark portfolio*. Isto inviabiliza o negócio, pois ocorrerão muitas transações e consequentemente, ocorrerá a diminuição significativa do retorno geral esperado. Sendo assim, espera-se ter um *tracking portfolio* que implique em poucas transações.

Considerando estas desvantagens, este problema será resolvido utilizando o método proposto por Feng e Palomar (2016). Este método calcula a solução de um problema de otimização de portfólios selecionado apenas alguns ativos (portfólios esparsos) tal que o risco seja o mesmo para todos os selecionados. Para o problema proposto em que temos o rastreamento de índices aprimorado e paridade de risco, o método calculará um *tracking portfolio* esparso que superará os índices de mercado e o capital distribuído nos ativos selecionados será tal que as contribuições de risco são as mesmas.

A lacuna a ser preenchida por este trabalho é abordar este tipo de problema que nunca foi visto anteriormente. É encontrar um *tracking portfolio* através da seleção de ativos, que regulariza a sua quantidade, com rastreamento de índice aprimorado (minimizando o *tracking error*) e com paridade de risco (mesma contribuição de risco para todos os ativos selecionados). É importante reforçar que se trata de um problema diferente, pois tem todos os componentes em conjunto, que não foram vistos anteriormente desta maneira: rastreamento de índice aprimorado com paridade de risco em portfólios esparsos.

Sendo assim, o **objetivo** desse trabalho é usar as estratégias de paridade de risco com rastreamento de índice aprimorado, de forma que se torne uma alternativa viável para alocação de portfólios no mercado financeiro, na busca de estabilidade e

diversificação de portfólio. A **relevância** desse trabalho é apresentar os benefícios que podem ser gerados utilizando essas estratégias em portfólios esparsos.

Desde o modelo clássico de média-variância proposto por Markowitz (1952), o problema de alocação de ativos tem sido amplamente estudado. A nossa abordagem é feita pela média-variância ao passo que as outras propostas são por outra abordagem que analisa o comportamento dos ativos ao longo do tempo. No modelo, chamado uni-período, é analisado um período à frente (podendo ser um dia, uma semana ou outra periodicidade). Na função objetivo não é considerado um determinado período de tempo, ela tem um valor esperado e uma matriz de covariância, e a periodicidade dela pode ser diária, semanal ou mensal de acordo como é estimado na matriz de covariância. Essa abordagem é diferente, pois trabalha com um valor esperado e um período já determinado, seguindo a linha de Markowitz, através do modelo de média-variância.

Nos experimentos numéricos, serão utilizados dados disponíveis da BM&FBOVESPA e S&P 500 de um período de aproximadamente 5 anos. Com isso, é possível fazer uma comparação com o resultado real histórico da BM&FBOVESPA e S&P 500 do mesmo período. Este cenário comparativo permitirá a análises da eficácia do modelo e a solução proposta.

Este trabalho está divido em seis capítulos: “Introdução”; “Embasamento Teórico”; “Otimização de portfólios com estratégias de Rastreamento de Índice Aprimorado e Paridade de Risco com Esparsidade”; “Implementação e Resultados Numéricos”; “Conclusão” e “Referências”. No segundo capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos de Otimização, Programação Quadrática assim como os Métodos de Solução, Método Primal-Dual Seguidor de Caminho e ACS - Aproximação Convexa Sucessiva. Também, serão abordados vários aspectos relacionados à Otimização de Portfólios, assim com conceitos básicos como Risco, Retorno e Volatilidade, o Modelo de Markowitz, Fronteira Eficiente e o Modelo Paramétrico (Parametrizado). Em seguida são discutidas as estratégias de investimento de rastreamento de índice e paridade de risco com seu contexto histórico. Adicionalmente, são apresentados os respectivos modelos matemáticos destas estratégias e por fim brevemente explicado os Portfólios Esparsos. No terceiro capítulo, será descrito o problema abordado, discutida a sua formulação e apresentado o Algoritmo de Resolução

do Problema Final. No quarto capítulo, será detalhada a Implementação e Resultados Numéricos. No quinto capítulo, são apresentados a Conclusão e Trabalhos Futuros e por fim, no sexto capítulo, são apresentadas as Referências.

1.1. Trabalhos Relacionados e Revisão Bibliográfica

Foram feitas diversas buscas por trabalhos relacionados ao assunto estudado. A finalidade destas buscas, foi coletar e identificar publicações, dissertações, teses e artigos relacionados a rastreamento de índice aprimorado, paridade de risco e portfólios esparsos. Estas buscas foram realizadas fundamentalmente em bases científicas que indexam publicações científicas em Computação. Os trabalhos relacionados foram obtidos nas seguintes bases científicas: Google Acadêmico (https://scholar.google.com.br/), Portal de Periódico da CAPES (http://www.periodicos.capes.gov.br/), ScienceDirect (http://www.sciencedirect.com/), IEEE Xplore (http://ieeexplore.ieee.org/) e ACM DL - Association for Computer Machinery Digital Library (http://dl.acm.org/).

A busca e escolha dos artigos deram-se da seguinte forma e ordem: seleção das palavras chave, categorização e exclusão por título e assunto, leitura e categorização por assunto, exclusão dos trabalhos com pouca relevância e escolha dos trabalhos utilizados relacionados ao assunto estudado. Este processo de busca ocorreu em 2017 e 2018. Os trabalhos analisados foram selecionados seguindo os critérios apresentados anteriormente e todos com contribuições para este estudo.

Esta revisão de literaturas possibilitou uma visão ampla da área de trabalhos sobre a estratégia de rastreamento de índice e paridade de risco, assim como portfólios esparsos, e no final deste processo foi obtido um total de 25 trabalhos relacionados.

1.1.1. Lista dos Principais Trabalhos Revisados

Em Feng e Palomar (2015(b)), é proposta uma formulação geral do problema de portfólio de paridade de risco que pode se adequar à maioria das formulações existentes, contendo uma família de métodos de otimização convexa sucessivos simples e eficientes para a formulação geral, e os resultados numéricos obtidos mostram que estes métodos propostos superam significativamente os existentes. Este artigo foi importante, pois

descreve alguns parâmetros que também são utilizados na implementação proposta neste trabalho.

Entre os trabalhos analisados, vários fazem uma análise cuidadosa sobre a paridade de risco e alternativas para selecionar um determinado número de ativos. Em Bai *et al*. (2016), por exemplo, foi discutido o problema de encontrar portfólios que satisfaçam a paridade de risco, investindo ou em ativos individuais ou em um grupo de ativos. Este artigo foi importante para motivar e direcionar os estudos sobre cardinalidade, esparsidade e portfólios esparsos.

Já em Maillard *et al*. (2010), foi considerado uma abordagem de paridade de risco, onde a contribuição de risco de cada componente do portfólio é igualada, maximizando a diversificação do risco. Este artigo ajudou na compreensão da aplicação da estratégia de paridade de risco, nível de risco, volatilidade e diversificação.

O trabalho de Paulo *et al*. (2016) foi relevante nos estudos de *enhanced index tracking*. Nesse artigo, os autores consideram uma abordagem em que o *tracking portfolio* é composto de um determinado subconjunto de ativos, equilibrado por uma escolha apropriada de um parâmetro de aversão ao risco.

Vale destacar os trabalhos de Jansen e Dijk (2002), Feng e Palomar (2015(a)) e Benidis *et al*. (2018) que foram muito importantes no entendimento do conceito de portfólios esparsos e da estratégia de investimento rastreamento de índices.

O trabalho de Song *et al*. (2015), considerou o uso da norma l_0 visando generalizar a esparsidade e foi importante para a formulação do cálculo da aproximação quadrática de segunda ordem que é usada no algoritmo implementado.

Sriperumbudur *et al*. (2007) e Candes *et al*. (2008), estudaram diferentes métodos para esparsidade com o uso da norma l_1, que ajudaram na formulação do cálculo da aproximação linear de primeira ordem que também é usada no algoritmo implementado.

Finalmente, destacando os trabalhos de Scutari *et al*. (2014), Facchinei *et al*. (2015) e Daneshmand *et al*. (2015), onde foram apresentados e propostos novos *frameworks* para otimização de funções não-convexas e que serviram de base para a definição de parâmetros importantes do algoritmo implementado e para o entendimento do ponto de convergência deste mesmo algoritmo.

De uma forma geral, as análises dos trabalhos demonstram o quanto o rastreamento de índice e a paridade de risco já têm sido utilizadas separadamente como estratégias de investimentos.

Os estudos avaliados também demonstram a necessidade de investigar e mensurar a aplicação da paridade de risco com rastreamento de índice em portfólios esparsos, já que não há nenhum trabalho existente nestas áreas em conjunto. Neste contexto podemos verificar e afirmar a originalidade desta pesquisa. Dentre os desafios deste trabalho, está como construir um portfólio baseado na estratégia de paridade de risco com rastreamento de índice aprimorado, podendo selecionar apenas alguns dos ativos disponíveis, mantendo a contribuição de risco similar para todos eles, garantindo desta maneira uma diminuição do custo total geral, se comparado com o custo de operação de um portfólio onde todos os ativos são obrigatoriamente selecionados.

Após categorização e revisão geral da literatura foi feita uma adaptação da proposta de Feng e Palomar (2016), adicionando a estratégia de rastreamento de índice aprimorado para alcançar o objetivo proposto.

2. Embasamento Teórico

Neste capítulo serão introduzidos os conceitos e definições matemáticas necessárias para o entendimento do problema de otimização de portfolios. Serão apresentados conceitos básicos de Programação Quadrática. Além disso, será visto o Método Primal-Dual Seguidor de Caminho para a solução do problema assim como uma introdução a ACS - Aproximação Convexa Sucessiva. Também serão abordados conceitos básicos relacionados à Otimização de Portfólios, o Modelo de Markowitz, o Modelo Paramétrico (Parametrizado). Em seguida serão vistas as estratégias de rastreamento de índice e paridade de risco, com seus respectivos modelos matemáticos e por fim, serão apresentados os Portfólios Esparsos.

Otimização é o processo de aplicação de técnicas e métodos matemáticos para calcular a solução ótima de um problema de minimização ou maximização de uma função objetivo sujeita ou não a um conjunto de restrições. Alguns exemplos deste tipo de problemas são: controle de estoques, otimização de processos, controle de produção ou maximização da margem de contribuição. Neste trabalho, será tratado o problema de otimização de carteiras de investimentos.

Um problema de otimização é representado como segue:

$$\begin{array}{lll} \min\ (\max) & f(x) & \\ sujeito\ a & g_i(x) \leq 0 & i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 0 & j = 1, \dots, l \\ & x \in X & \end{array} \tag{1}$$

em que f, g, h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, X é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

O problema (1) representa a minimização ou maximização de uma função objetivo $f(x)$, sujeita a um conjunto de $m + l$ restrições, em que m restrições $g(x)$ são de desigualdade e l restrições $h(x)$ são de igualdade.

2.1. Restrições de um Problema

As restrições que compõem um problema podem estar enquadradas em diversas situações que dependem da suscetibilidade do problema. As restrições podem ser de igualdade ou desigualdade. Restrição, como o próprio nome sugere, impõe uma

condição de limite ou condição restritiva, ou seja, é uma regra que deva ser seguida que faz parte do problema. São relações que restringem os valores que as variáveis de decisão podem assumir.

O conjunto de restrições lineares em um problema de programação forma uma região convexa denominada região de factibilidade (região factível). Suponha que $x \in X$, com $X \in \mathbb{R}^n$ são as variáveis de decisão do problema de otimização, neste caso a região factível pode ser definida por restrições de igualdade ou desigualdade:

$$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b \; e \; x \in X\} \tag{2}$$

no caso igualdades ou:

$$\{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b \; e \; x \in X\} \tag{3}$$

no caso de desigualdades. Um ponto é factível se pertencente à região factível do problema.

2.2. Convexidade

Um conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ é convexo se para quaisquer dois pontos x e y que pertencem a X então $\lambda x + (1-\lambda)y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$; isto é, a combinação convexa dos dois pontos quaisquer também pertence ao conjunto. Note que $\lambda x + (1-\lambda)y$ para $\lambda \in [0,1]$ representa um ponto no segmento de reta que une os pontos x e y. Desta definição podemos interpretar geometricamente que para qualquer par de pontos x e y, o segmento de reta entre eles também pertencerá ao conjunto.

Uma função f é convexa se para quaisquer dois vetores x e y a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Geometricamente, suponha a corda que une os pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$, o valor de f em quaisquer ponto $\lambda x + (1-\lambda)y$ será menor ou igual a altura de qualquer ponto na corda que une $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$.

Uma função f é côncava se $-f$ é convexa.

Exemplos de funções convexas:

1. $f(x) = c^T x, x \in \mathbb{R}^n$;
2. $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x, x \in \mathbb{R}^n$, onde Q é uma matriz simétrica e semi-definida positiva.

2.3. Problema de Programação Quadrática

Um problema de programação quadrática (PQ) envolve a minimização ou maximização de uma função quadrática sujeita a um conjunto de restrições lineares.

O PPQ pode ser definido como segue:

$$\begin{array}{ll} min & x^T Q x + c^T x \\ sujeito\ a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}, \tag{4}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de decisão, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica ($Q = Q^T$), $c \in \mathbb{R}^n$ é o vetor do termo linear, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz dos coeficientes das restrições, $b \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de termos independentes das restrições.

A matriz Q pode ser definida positiva, definida negativa, semi-definida positiva, semi-definida negativa ou indefinida. Segundo Golub (2013), considerando $x \in \mathbb{R}^n$ e $x \neq 0$, uma matriz $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se $x^T Q x > 0$ e semi-definida positiva, se $x^T Q x \geq 0$. Da mesma maneira temos a matriz definida negativa e semi-definida negativa, quando $x^T Q x < 0$ e $x^T Q x \leq 0$, para $x \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Ainda segundo Golub (2013), uma matriz Q $\in R^{nxn}$ é considerada indefinida quando para $x \in \mathbb{R}^n$ podemos ter $x^T Q x < 0$ ou $x^T Q x > 0$.

Dependendo da matriz, da função objetivo, teremos uma solução local (Q indefinida) ou uma solução global (Q semi-definida ou definida), (Luenberger (2007).

As condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), também conhecidas como condições de otimalidade, estabelecem condições, necessárias e suficientes, para encontrar a solução ótima de um problema de PQ.

KKT vem do sobrenome de três importantes matemáticos. William Karush, professor de uma universidade no estado da Califórnia, USA, em sua dissertação de mestrado em 1939 apresentou pela primeira vez as condições necessárias em problemas

com restrições de desigualdade. Harold W. Kuhn, matemático americano, e Albert W. Tucker, matemático canadense, publicaram as condições em uma conferência em 1951.

Consideramos as seguintes formas gerais de primal-dual para problemas convexos de PQ:

Primal	Dual
$$\begin{aligned} min \quad & c^T x + \frac{1}{2} x^T Q x \\ sujeito\ a \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0; \end{aligned}$$	$$\begin{aligned} max \quad & b^T y - \frac{1}{2} x^T Q x \\ sujeito\ a \quad & A^T y + s - Qx = c, \\ & y, s \geq 0, \end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m \leq n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz semi-definida positiva, $x, s, c \in \mathbb{R}^n$ e $y, b \in \mathbb{R}^m$. Em um caso especial de $Q = 0$, esses problemas se tornam o primal-dual de problemas de programação linear (PL). Usando a teoria da dualidade de Lagrange, as condições de otimalidade de primeira ordem para esses problemas podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ A^T y + s - Qx &= c, \\ XSe &= 0, \\ (x, s) &\geq 0, \end{aligned}$$

onde X e S são matrizes diagonais em $\mathbb{R}^{n \times n}$ com elementos dos vetores x e s distribuídos nas diagonais respectivamente, e $e \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de uns. A terceira equação $XSe = 0$, chamada de condição de complementaridade, pode ser reescrita como $x_j s_j = 0, \forall j \in \{1,2, \dots, n\}$ e implica que pelo menos uma das duas variáveis x_j ou s_j tem que ser zero na solução ótima. A maneira como a condição de complementaridade é tratada determina o tipo de algoritmo de otimização, (Gondzio 2011).

Problemas de PQ com restrições de desigualdade podem ser resolvidos por um método ativo em que a direção da resolução é a mesma que para a solução de problemas correspondentes com restrições de igualdade. Assim, este método irá resolver um problema quadrático em um número finito de etapas.

Uma classe destes métodos consiste em métodos de primeira ordem, onde a resolução se move em uma direção relacionada ao residual, ou seja, o erro, nas equações. Outra classe de métodos é baseada na ampliação do método das direções conjugadas

para sistemas não positivos e definidos. E, finalmente, uma terceira classe é baseada no método de Newton para resolver sistemas de equações não-lineares e resolvendo uma versão linearizada do sistema em cada iteração (Luenberger 2007).

Métodos mais eficazes são desenvolvidos em cima da estrutura linear das condições necessárias e pela introdução de aproximações das informações de segunda ordem.

Existem várias abordagens para resolver problemas de PQ. As condições de KKT, já citadas anteriormente, formam a espinha dorsal da programação não-linear.

Em Bazaraa (2006), para PQ, o sistema KKT é resolvido por uma técnica de rotação complementar que pode ser usada para a classe mais geral de problemas lineares complementares.

Bazaraa (2006) também mostra que as condições de KKT para PQ reduzem a um problema linear complementar. O algoritmo de rotação complementar é então usado para resolver o sistema KKT.

As condições de KKT para problemas de PQ e PL podem ser escritas como um problema linear complementar e, portanto, os algoritmos podem ser usados para resolver problemas de programação tanto linear quanto quadrático.

Considerando a solução de PQ através de PL complementares, um dos esquemas mais populares para resolver um PQ, é resolver o sistema KKT, proposto por Markowitz (1956).

Essas condições de KKT são necessárias para a otimização de problemas de programação não-linear contendo restrições de desigualdades, que satisfazem certas condições de regularidade (conhecidas como qualificações de restrição). São suficientes para indicar a otimalidade de certos fatores de problemas de programação não-linear contendo restrições de desigualdade que satisfazem as propriedades generalizadas de convexidade.

2.4. Métodos de Solução

A matemática de otimização convexa tem sido estudada por cerca de um século, e mais recentemente, vários estudos relacionados estimularam um interesse novo no

tema, os métodos de pontos interiores. É reconhecido que os métodos de pontos interiores, desenvolvidos na década de 1980 para resolver problemas de PL, podem ser usados também para resolver problemas de PQ.

O objetivo dos métodos de pontos interiores é encontrar uma solução ótima de um problema de otimização, calculando pontos no interior da região de factibilidade, como o próprio nome sugere, sem chegar aos limites. Como a margem é bem pequena, chega-se praticamente nas mesmas soluções, mas não se movimenta nos pontos extremos. Além disso, os métodos de pontos interiores apresentam bom desempenho na maioria dos problemas de PL de grande porte, assim como em PQ, já que são robustos e possuem convergência rápida, Andersen (2011).

O método de Newton, elaborado por Isaac Newton em 1671 e descrito em 1690 por Joseph Raphson, no livro Analysis Aequationum Universalis, é uma técnica usada para se determinar raízes de equações não lineares entre um determinado intervalo. É um método iterativo, para calcular os zeros de uma função diferençável $f(x)$. Destacando que o método de Newton é um dos métodos numéricos mais eficientes para resolver sistemas de equações não lineares, já que ele possui taxa de convergência quadrática. O método de Newton é usado na solução do sistema não linear formado pelas condições de otimalidade do problema de PL ou PQ sem as condições de não-negatividade.

2.4.1. Método Primal-Dual Seguidor de Caminho

O método de pontos interiores Primal-Dual Afim Escala não tem bons resultados, pois os pontos primais e duais se aproximam rapidamente de seus limites. Com isso, as direções calculadas nestas condições não são muito boas e o método progride muito lentamente, provocando problemas de convergência. Os pontos precisam manter uma trajetória central na região de factibilidade.

Para evitar que isto aconteça, no método Primal-Dual Seguidor de Caminho é introduzida uma perturbação μ na condição de complementaridade, e assim os pontos irão manter a trajetória central. Esta perturbação μ^k é inicializada com um valor alto que vai diminuindo à medida que o método se aproxima de uma solução do problema.

O *solver* utilizado na implementação deste trabalho, o MOSEK, resolve problemas de PQ pelo método de pontos interiores Primal-Dual Seguidor de Caminho.

2.5. ACS - Aproximação Convexa Sucessiva

Na abordagem de solução do problema deste trabalho, os autores Feng e Palomar (2016), têm que lidar com o surgimento de funções não-convexas. Para contornar esta situação, faz-se necessário transformar estas funções não-convexas em funções convexas através de técnicas de aproximação.

A abordagem de resolução é baseada em aproximação convexa sucessiva ou ACS, em inglês *successive convex approximation* ou SCA, do problema aproximado.

Em Feng e Palomar (2016), a função indicadora, $\mathbb{1}_{\{w_i \neq 0\}}$, que aparece em (15) é aproximada da seguinte maneira:

$$\rho_p^{\epsilon}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2_{\epsilon}\,(p+\epsilon)\log(1+1/p)}, & |x| \leq \epsilon \\[2ex] \dfrac{\log(1+|x|/p\,) - \log(1+\epsilon/p\,) + \dfrac{\epsilon}{2(p+\epsilon)}}{\log(1+1/p)}, & |x| > \epsilon \end{cases}$$

onde $p > 0$ e $\epsilon > 0$ são parâmetros de controle, e quando ambos vão à zero, $\rho_p^{\epsilon}(x)$ converge para a função indicadora.

No algoritmo que é utilizado como ferramenta para a resolução do problema final "*Algoritmo 1 SCA*", fornecido por Feng e Palomar e apresentado na seção 3.2.2., são utilizados os seguintes valores para p e ϵ respectivamente, $p = 0{,}002$ e $\epsilon = 10^{-8}$. Quanto menor o valor de ϵ, melhor a função indicadora é aproximada em torno do ponto $x = 0$. De fato, quando ϵ converge para zero, $\rho_p^{\epsilon}(x)$ converge para uma função (não diferenciável). Na prática, podemos definir o valor de ϵ bem pequeno para obter uma aproximação satisfatória e evitar a não diferenciabilidade numérica em $x = 0$.

O objetivo da abordagem ACS, é aproximar a função original, não convexa, a cada iteração, em um problema convexo solucionável e obter uma atualização dos valores de θ (*theta*) e de w *(*pesos*)*. Dessa forma, é garantida uma solução ótima, Feng e Palomar (2015(b)).

2.6. Otimização de Portfólios

Nesta seção, serão abordados vários aspectos relacionados à Otimização de Portfólios. São apresentados alguns conceitos básicos como Risco, Retorno e Volatilidade, o Modelo de Markowitz, Fronteira Eficiente e o Modelo Paramétrico (Parametrizado). Em seguida veremos as estratégias para alocação de portfólios, rastreamento de índice e paridade de risco, com seus respectivos modelos matemáticos. Adicionalmente, serão brevemente discutidos os Portfólios Esparsos.

2.6.1. Risco, Retorno e Volatilidade

Todo investimento tem uma relação entre o risco e o retorno. O risco em um investimento é a probabilidade de ameaça ou perigo (implica em perdas financeiras) resultante do investimento. O retorno é o percentual de quanto será devolvido em relação ao valor inicial investido no final de um determinado período. Ao fazer um investimento, deve-se analisar ambas as variáveis.

Em um cenário ideal, espera-se o maior retorno possível atrelado a um risco zero ou o mais próximo disso. Em situações em que um investidor tenha que escolher entre dois investimentos com mesmo retorno, o investimento com o menor risco será o escolhido. Em outras situações com dois investimentos com o mesmo risco, o investimento com o maior retorno será escolhido. Essas serão as escolhas de um investidor racional, que demonstra bom senso, dessa forma, podemos medir o nível de aversão ao risco de um investidor. Retornos pequenos, somente são aceitáveis se os riscos também forem pequenos, o mesmo ocorre com a situação em que analisamos o risco como ponto principal. Riscos maiores, somente serão aceitáveis se estiverem atrelados a grandes retornos.

A volatilidade é uma medida de risco que é muito utilizada no mercado financeiro. Esta medida quantifica as oscilações que ocorrem em um determinado investimento ou portfólio. Mostra a frequência e intensidade das mudanças que intercorrem quanto ao valor do investimento e seu retorno. Neste trabalho, é apresentado a decomposição de Euler para esta medida de risco e aplicado esse princípio de alocação à volatilidade.

Na Figura 1, está representada a Relação de $Risco \times Retorno$, onde podemos entender melhor os possíveis cenários que podem existir:

Figura 1. Relação de Risco X Retorno.

Não existe uma regra, uma situação melhor ou pior com relação ao risco e retorno (ou rendimento), tudo vai depender de cada situação, fatores diversos ou imprevisíveis do mercado e do perfil de cada investidor.

Existem dois tipos de risco relacionados ao mercado financeiro, e definem o comportamento do mercado. São eles, o risco sistemático (ou sistêmico) e não-sistemático (ou não-sistêmico). O risco sistemático é o risco do mercado e não temos muito poder e controle sobre ele. Este risco envolve ativos em geral, taxas de juros, entre outros aspectos do mercado, afeta a economia como um todo e é medido através do índice de mercado. O risco não-sistemático, é o risco específico de cada ativo ou setor e portanto, na sua existência, somente afetará este ativo ou setor em questão. Pode-se evitar este risco, simplesmente através da diversificação, investindo em diferentes ativos ou portfólios.

Matematicamente, existem diversas maneiras de se representar o risco, por exemplo, através do cálculo de momentos parciais ou Valor-em-Risco ou VaR (*Value-at-Risk*. A maneira mais prática e frequentemente usada, é pelo cálculo da variância/ desvio padrão (volatilidade), como abordado no modelo de Markowitz. Já com relação ao retorno, matematicamente podemos definir o retorno futuro de um ativo, considerando seus valores históricos. Assim teremos que o retorno esperado é igual à sua média histórica.

2.6.2. Modelo de Markowitz

Harry Max Markowitz nasceu em Chicago, estado de Illinois nos Estados Unidos da América, em 24 de agosto de 1927, é economista e ganhador de dois importantes prêmios. Em 1989, foi contemplado com o Prêmio Von Neumann em Teoria da Pesquisa de Operações pela Sociedade de Pesquisa de Operações da América e pelo Instituto de Ciências de Gestão e no ano seguinte, em 1990, recebeu o Prêmio Nobel em Ciências Econômicas. Durante seus anos iniciais de estudo, Markowitz teve muito interesse em física e filosofia. Segundo o próprio Markowitz (1990) "Tornar-se um economista não era um sonho de infância meu. Quando terminei o diploma de bacharel e tive que escolher uma divisão superior, considerei o assunto por um curto período de tempo e decidi por Economia". Assim, foi surgindo esse importante economista e sua história, então quando chegou a hora de escolher um tema para a sua dissertação, em uma conversa casual com um corretor, o mesmo sugeriu aplicar métodos matemáticos ao mercado de ações.

Os conceitos básicos da teoria do portfólio de Markowitz surgiram no estudo do livro *Theory of Investment Value* de John Burr Williams (1938). Williams propunha que o valor de uma ação fosse igual ao valor presente de seus dividendos futuros. Markowitz concluiu que para maximizar o valor esperado de um portfólio seria preciso investir apenas em um único investimento, mas na realidade, não era assim que os investidores agiam.

A *diversificação* é a escolha de ativos que combina o máximo retorno com o menor risco possível. Este pensamento, tão óbvio hoje, foi primeiramente apresentado por Markowitz (1959) e fundamentado através da análise por média-variância; conceito aplicado até os dias de hoje. Porém o modelo de Markowitz não é muito defendido atualmente, principalmente após os problemas encontrados na crise de 2008. Estes problemas não foram causados unicamente pelo método de alocação, mas boa parte foi causada pelos parâmetros de entrada, que estavam calibrados com dados do passado. No entanto, este modelo não está morto e uma prova disso é que recentemente surgiram otimizações robustas baseadas neste método que melhoraram a *performance* de portfólios, DeMiguel *et al*. (2009).

Os investidores se diversificam porque estão preocupados com o risco e com o retorno. Então, a variância surge como uma medida de risco que depende de covariâncias, assim como também é importante a correlação entre os ativos. Uma vez que havia dois critérios, risco e retorno, era natural assumir que os investidores selecionassem os portfólios a partir do conjunto de suas combinações ideais. Para reduzir a variação para um determinado retorno esperado, teve que considerar não apenas as médias e variâncias dos valores mobiliários, mas também suas covariâncias. As soluções para estes problemas foram desenvolvidas em parte na preparação da sua dissertação e em parte ao escrever seu livro em 1959. O resultado final é o que temos hoje, o conceito de diversificação, que é detalhado em seu modelo.

Para Markowitz (1959), um bom portfólio é mais do que uma longa lista de estoques e títulos. É algo que deve ser todo balanceado, fornecendo ao investidor, proteções e oportunidades com respeito a uma ampla variedade de contingências. Assim, o investidor deve construir um portfólio integrado, que melhor atenda às suas necessidades.

O modelo de Markowitz, também conhecido como teoria de Markowitz, teoria da carteira, teoria moderna do portfólio ou simplesmente teoria do portfólio estuda a relação entre o risco e retorno (ou rendimento). Estabelece que, pode-se reduzir o risco de um investimento combinando dois ou mais ativos financeiros e se um investidor tiver que optar entre dois ativos, escolherá o de menor risco.

O modelo matemático de Markowitz ajuda os investidores a conseguirem o menor risco possível com uma determinada taxa de retorno. É sabido que toda decisão implica em um risco, portanto, o importante é estar atento para tomar a melhor decisão e ter os valores suficientes para poder assumir esse risco. Para minimizar os riscos, é recomendado investir em portfólios de ações ao invés de investir em ações individuais, porque assim é possível diversificar, devido ao fato de estar trabalhando com diferentes ativos.

O modelo de Markowitz surge justamente para responder a questão sobre a diversificação, se o portfólio escolhido está realmente diversificado de forma que ajude ao investidor a reduzir os riscos. Ele permite encontrar o portfólio ótimo com a melhor relação entre risco e retorno. O modelo indica quais ativos devem ser selecionados e

quanto deve ser investido. Segundo este mesmo modelo, é possível examinar o comportamento de um ativo com base no seu retorno, variância, covariância e correlação. Para entender melhor o modelo de Markowitz, precisamos conhecer alguns conceitos:

Retorno (r_x) é o lucro que se obtém de um ativo x.

Variância (σ^2) é a variabilidade que tem o ativo com relação à sua média.

Desvio Padrão (σ) é a raiz quadrada da Variância (σ^2), é uma medida de risco, também conhecido como volatilidade.

Covariância ($\sigma_{x,y}$) é a variabilidade entre dois ativos diferentes x e y; mede a variação do retorno de um ativo em relação à variação do retorno de outro ativo.

Correlação ($\rho_{x,y}$) é o comportamento que os ativos x e y tem entre si. É uma medida de quanto estão dispersos, podendo ser correlação negativa ou positiva com valores entre -1 e 1; valores tendendo a zero, significam pouca relação. O risco diminui à medida que mais ativos são adicionados ao portfólio, o que provoca o aumento das covariâncias.

O modelo de Markowitz é um problema de programação quadrática definido como segue:

$$\min\ w^T Q w \tag{5}$$

$$sujeito\ a\ \ \mu^T w = R$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, i = 1, \dots, n$$

Onde:

- A função quadrática representa o risco e Q é a matriz simétrica de covariância do problema. Cada valor da matriz representa a covariância de um ativo em relação ao outro.

- w é um vetor coluna, que representa como o valor total disponível será investido considerando todos os ativos disponíveis. Consequentemente, w_i será o valor da parcela que está sendo investido em determinado ativo.
- $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ indica que a soma dos pesos (w) do que será investido em cada ativo, deverá ser igual a 1.
- μ é um vetor coluna, porém representa o retorno esperado, sendo assim, μ_i é o retorno esperado para aquele ativo i.
- R representa o retorno do portfólio.
- n é a quantidade de ativos do portfólio.

O objetivo é minimizar o risco (função objetivo) para um determinado nível de retorno esperado (primeira restrição). As demais restrições servem para indicar que todo o valor deve ser investido e que não se pode investir valor negativo, ou seja, não é permitida a venda a descoberto (*short-selling*) de um determinado ativo.

Este modelo busca a maior satisfação do investidor. Geralmente, os investidores em busca de maior diversificação, adicionam aos seus portfólios, ativos com correlação negativa, assim conseguem diminuir o risco diversificável ou não-sistemático. Note que não temos nenhum poder e controle sobre o risco sistemático, que como o próprio nome sugere, é o risco do sistema ou do mercado decorrente de fatores externos do ambiente, como por exemplo, eventos políticos. O risco sistemático será sempre igual, independentemente da quantidade de ativos no portfólio. Segundo Assaf (2010), quanto maior o número de ativos em um portfólio, menor será o risco total não-sistemático. À medida que aumenta a quantidade de ativos no portfólio, o risco não-sistemático diminui, conforme podemos visualizar na Figura 2:

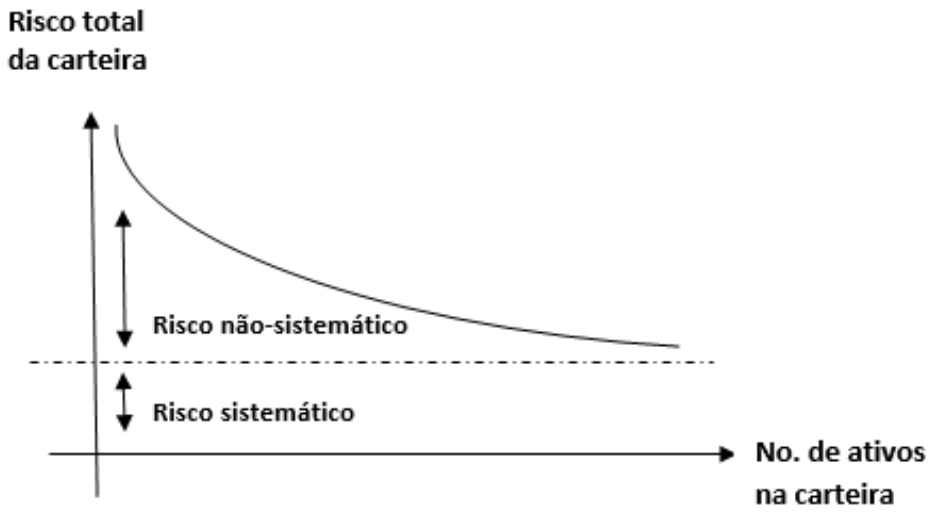

Figura 2. Risco Total × Quantidade de Ativos.

Na sequência podemos encontrar a fronteira eficiente, que é construída com os valores de retorno médio e desvio padrão/volatilidade (contribuição de risco) dos portfólios. Assim podemos eleger um portfólio ótimo através de uma análise feita graficamente.

2.6.3. Fronteira Eficiente

O conceito da fronteira eficiente é um dos pontos cruciais do modelo de Markowitz. Na representação gráfica da fronteira eficiente conseguimos apontar os portfólios que mais se encaixam no perfil de cada investidor, combinando o retorno que se deseja alcançar com o risco que se está disposto a enfrentar e, considerando a correlação dos ativos.

Com a fronteira eficiente, o investidor consegue analisar e tomar a melhor decisão tendo em vista os seus objetivos. Para poder interpretar melhor um gráfico de fronteira eficiente, primeiramente precisamos entender o conceito do princípio da dominância, que neste caso é quando conseguimos comparar graficamente dois portfólios em relação aos seus riscos e retornos (ou rendimentos). Quando os portfólios estão alinhados por um dos parâmetros, escolhemos um dos portfólios considerando o outro parâmetro.

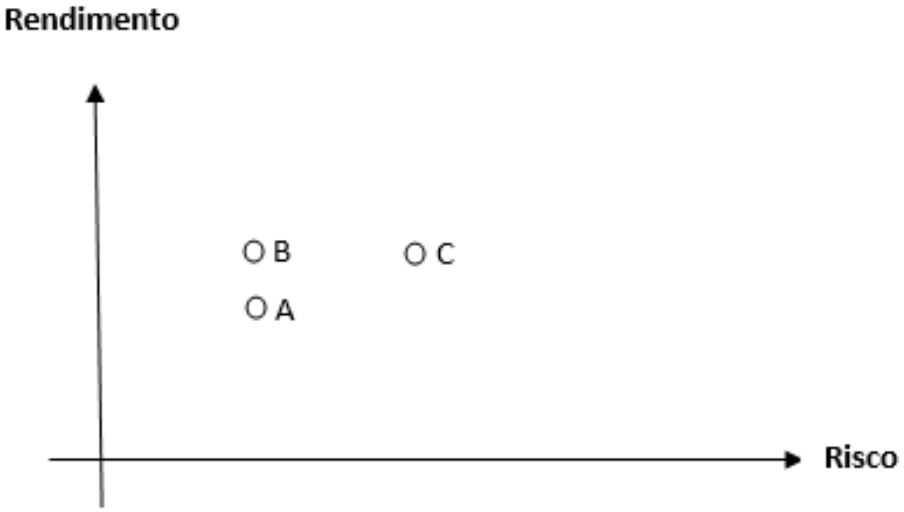

Figura 3. Exemplo Princípio Dominância.

Considere a Figura 3. Os portfólios A e B estão alinhados em relação ao risco, ou seja, possuem a mesma contribuição de risco, portanto B domina A, pois tendo o mesmo risco, o portfólio B possui retorno maior. Aplicamos a mesma metodologia quando analisamos os portfólios B e C. Os portfólios B e C estão alinhados em relação ao retorno, pois possuem o mesmo retorno, sendo assim, B domina C, pois possui menos risco. Já sobre a análise dos portfólios A e C, não podemos concluir muito, pois vai depender de cada caso e da preferência do investidor ao tomar a decisão: com o portfólio C, será mais arriscado para ter mais retorno ou com o portfólio A será mais conservador, correndo menos risco, porém com retornos menores.

No modelo de Markowitz, vimos a relação do risco e do retorno e nele está definido que podemos reduzir o risco se investimos em uma combinação de dois ou mais ativos financeiros, para a construção de um portfólio ótimo. Markowitz disse que se um investidor tem que optar entre dois ativos, elegerá aquele que tem o menor risco.

Portanto, para a construção da fronteira eficiente, primeiramente são definidos quais e quantos ativos serão analisados e comparados. Feito isso, são definidas e evidenciadas todas as diferentes combinações de pesos de participação de todos os ativos, considerando que a soma para cada combinação deva ser sempre 100%, ou seja, isso quer dizer que todo o dinheiro está sendo investido. Cada uma destas combinações, será um portfólio diferente. Posteriormente são calculados o retorno médio e desvio padrão para cada uma destas possibilidades de alocação, ou seja, destas combinações

previamente estabelecidas. O retorno médio para cada combinação é encontrado simplesmente pela soma geral da taxa de participação de cada ativo, multiplicado respectivamente por seu retorno médio geral, assim teremos um retorno médio para cada combinação específica. E por fim, o desvio padrão de cada combinação de pesos, é encontrado através da raiz quadrada da variância. Similar ao retorno médio, teremos um valor de desvio padrão respectivo para cada possibilidade de combinação de investimentos.

No final deste processo, teremos uma tabela, com todos estes valores, ou seja, um valor de retorno médio e um valor de desvio padrão (raiz quadrada da variância), para cada uma das combinações de pesos, então a partir daí é criado um Gráfico de Dispersão, onde podemos visualizar uma linha curva, que é justamente chamada de fronteira eficiente. O modelo de Markowitz também é conhecido como modelo média-variância, justamente pelo fato de serem os dois principais cálculos que são usados no gráfico da fronteira eficiente.

A seguir estão descritos os passos para poder replicar o Modelo de Markowitz e construir a Fronteira Eficiente. Primeiramente, para se calcular a variância de um ativo, utilizamos a seguinte fórmula:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2}{n}$$

Isso significa que obteremos a soma de todos os retornos dos ativos, (X_t) menos seu retorno médio ($\bar{X}$), elevado ao quadrado, dividido pela quantidade de períodos ou ativos (n). Em seguida, para realizar o cálculo da correlação, é necessário a fórmula a seguir:

$$\rho_{a,b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{ai} - \overline{r_a}) * (r_{bi} - \overline{r_b})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(r_{ai} - \overline{r_a})^2 \sum_{i=1}^{n}(r_{bi} - \overline{r_b})^2}}$$

Como visto, neste passo é necessário realizar a soma do resultado da multiplicação de todas as diferenças entre os retornos dos ativos (r_{ai}) e suas respectivas médias ($\overline{r_a}$). Depois é calculada a soma total da subtração do retorno “a” com sua média, elevado ao quadrado e então se multiplica com a soma total da subtração do retorno “b”

com sua média, também elevado ao quadrado, então é calculada a raiz quadrada deste produto. E então, dividimos o primeiro resultado com o resultado da raiz quadrada.

Para calcular a covariância entre os ativos, utilizamos a seguinte fórmula:

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) * (y_i - \bar{y})}{n}$$

Neste caso, é necessário realizar a soma do resultado da multiplicação das diferenças entre o retorno dos ativos com suas respectivas médias e no final este valor é dividido pelo número de médias.

Finalmente, é necessário calcular a variância do portfólio, que é encontrada através da seguinte fórmula:

$\sigma_\rho^2 = \sum_1^n \sum_j^n w_i\, w_j \sigma_{i,j}$, que é equivalente à fórmula abaixo, considerando uma carteira com 2 ativos, ativo A e ativo B:

$$\sigma_\rho^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2(w_A w_B \sigma_{A,B}),$$

ou então equivalente à seguinte fórmula, considerando uma carteira com 3 ativos, ativo A, ativo B e ativo C:

$$\sigma_\rho^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + w_C^2\sigma_C^2 + 2(w_A w_B \sigma_{A,B}) + 2(w_A w_C \sigma_{A,C}) + 2(w_B w_C \sigma_{B,C}).$$

A variável "*w*" faz referência ao peso que o respectivo ativo tem no portfólio, ou seja, o quanto cada ativo representa em relação ao todo, percentualmente. A última parte desta equação é o produto dos pesos dos ativos pela covariância deles, multiplicado por 2.

É importante perceber que as correlações possuem valores que variam entre -1 e 1. Para se ter um portfólio com pouco risco, os ativos terão que ter correlação negativa, sempre mais próxima de -1. O risco diminui à medida que mais ativos são adicionados ao portfólio, o que provoca o aumento das covariâncias.

Vejamos um exemplo de aplicação deste modelo de Markowitz em um portfólio com três ativos, A, B e C, com uma combinação de pesos específicos, escolhidos aleatoriamente. Estes valores foram obtidos através de valores extraídos do *site* Yahoo Finanças e são utilizados meramente para demonstração de aplicação da fórmula

apresentada anteriormente. Na Tabela 1, estão representados os retornos médios, desvio padrão e percentual de participação (peso) de cada ativo no portfólio:

Tabela 1. Exemplo Portfólio do Modelo de Markowitz.

Ativo	Rendimento Médio (r)	Desvio Padrão (σ)	Peso (W*i*)
A	4%	2,16%	35%
B	7%	6,38%	45%
C	0,67%	4,5%	20%

Na Tabela 2, temos a matriz de variância e covariância dos respectivos ativos:

Tabela 2. Matriz de Variância/Covariância do Modelo de Markowitz.

	A	B	C
A	0,0005	0,0404	0,0237
B	0,0404	0,0041	0,0380
C	0,0237	0,0380	0,0020

Então, calculando a variância do portfólio, conforme fórmula apresentada acima, temos:

$\sigma_\rho^2 = 0{,}35^2 * 0{,}0005 + 0{,}45^2 * 0{,}0041 + 0{,}2^2 * 0{,}002 + 2*(0{,}35*0{,}45*0{,}0404) + 2*(0{,}35*0{,}2*0{,}0237) + 2*(0{,}45*0{,}2*0{,}0380) = 0{,}0238555$, portanto, neste caso, a variância do portfólio (σ_ρ^2) é 0,0238555.

Markowitz definiu o risco de um portfólio como seu desvio padrão, ou seja, a raiz quadrada da variância. No exemplo acima, a contribuição de risco deste portfólio (desvio padrão) será $\sigma = \sqrt{0{,}0238555} = 0{,}1544522579957962$, ou aprox. 15,44%.

A partir destes cálculos, podemos encontrar a fronteira eficiente, que é construída com os valores de retorno médio e desvio padrão (contribuição de risco) dos portfólios. Assim podemos eleger um portfólio ótimo através de uma análise feita graficamente.

No eixo horizontal (x), são representados os valores da medida de risco (volatilidade) do portfólio para cada combinação de pesos e no eixo vertical (y), os valores dos retornos médios (ou rendimentos médios), também para as mesmas e respectivas combinações de pesos.

Na Figura 4, representa um exemplo para termos uma visão geral da fronteira eficiente de Markowitz:

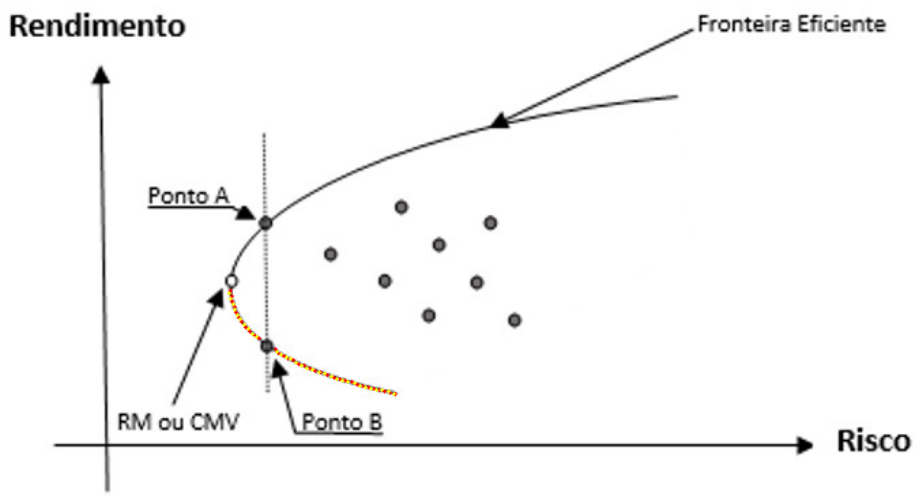

Figura 4. Exemplo Fronteira Eficiente de Markowitz.

Na Figura 4, o portfólio identificado como RM (Risco Mínimo) ou CMV (Carteira de Mínima Variância), apresenta o menor risco possível dentro das diferentes combinações. Também podemos notar que o portfólio localizado no ponto A tem exatamente o mesmo risco do portfólio localizado no ponto B, porém seu retorno é superior.

A fronteira eficiente é uma ferramenta que mostra ao investidor o maior retorno possível que se pode esperar dos seus portfólios, dado o nível de volatilidade ou risco que se está disposto a enfrentar. Implica que se o investidor escolhe qualquer combinação de investimento localizado sobre a fronteira eficiente, atingirá seu objetivo, pois estes portfólios são considerados os mais eficientes. Já os pontos indicados dentro da área limitada pela curva, serão os portfólios ineficientes ou não atrativos. Para estes portfólios, com um mesmo nível de risco é possível obter outro portfólio com retorno maior situado na fronteira eficiente.

Como podemos notar, todas as possibilidades são observadas, sendo que os portfólios mais eficientes (maior retorno dado determinado risco) formam a fronteira eficiente. Os portfólios posicionados mais ao norte (pra cima) e mais a oeste (pra esquerda), são considerados os mais eficientes.

Com a fronteira eficiente, cada investidor consegue perceber melhor a relação do risco e retorno dos portfólios e investir naquele que se ajusta mais adequadamente ao seu perfil.

2.7. Modelo Paramétrico (Parametrizado)

O Modelo Paramétrico ou Parametrizado utiliza o Modelo de Markowitz, descrito na seção 2.6.2., como base. Na função objetivo de minimização de risco é incluída a maximização do retorno e ambos são regulados através de um parâmetro λ, com $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\min \ \lambda w^T Q w - (1-\lambda) \ \mu^T w \tag{6}$$

$$sujeito\ a \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

O parâmetro λ regula o risco e o retorno em conjunto. Por exemplo, se $\lambda = 0$, a primeira parte da função objetivo desaparece e só o retorno é considerado. Se considerarmos $\lambda = 1$, a segunda parte da função desaparece e somente o risco é considerado; teremos um problema de minimização do risco. Valores de λ com $0 < \lambda < 1$, considera o perfil do investidor e sua preocupação com o risco e com o retorno. Este parâmetro é conhecido como *trade-off*.

Uma versão do modelo paramétrico considera o parâmetro regulador λ, $\lambda \geq 0$, somente para o retorno como mostrado a seguir:

$$\min \ w^T Q w - \lambda \mu^T w \tag{7}$$

$$sujeito\ a \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

Considerando $\boldsymbol{\lambda = 0}$, teremos a minimização do risco ($\mathbf{min}\ \boldsymbol{w^T Q w}$). Para $\boldsymbol{\lambda > 0}$, teremos a maximização do retorno para determinado risco.

2.8. Rastreamento de Índice

Rastreamento de Índice, em inglês, *Index Tracking*, é uma estratégia utilizada para acompanhar o índice de mercado. Estratégias ativas de investimento assumem que os mercados não são perfeitamente eficientes e então, os gerentes de fundos de investimentos podem identificar ativos com preços errados ou então fazer previsões melhores, e assim obter lucros com base nelas, visando sempre superar os índices de mercado. As estratégias de investimento passivas, por outro lado, assumem que os mercados são suficientemente eficientes e não podem ser vencidos em longo prazo, portanto, a filosofia de investimento é seguir diretamente os mercados. Rastreamento de Índice é uma estratégia de investimento passiva, onde tem como objetivo, construir um *tracking portfolio,* cujos retornos seguem um índice de mercado (ou algum índice de referência preferido).

Tracking Error ou erro de rastreamento é a diferença entre o retorno obtido do *tracking portfolio* e do retorno obtido do *benchmark portfolio*. Ele mede quão perto o *tracking portfolio* replica o índice de referência do mercado. Em princípio, quanto menor, melhor e se for igual a zero, os retornos do *tracking portfolio* e *benchmark portfolio*, serão iguais.

Existem três métodos para rastreamento de índice, o *Full Index Tracking* (rastreamento de índice completo), o *Synthetic Index Tracking* (rastreamento de índice sintético) e o *Sparse Index Tracking* (rastreamento de índice esparso). O método de rastreamento mais direto, conhecido como rastreamento de índice completo, é comprar todos os ativos que constituem o *benchmark portfolio*, em quantidades apropriadas para acompanhar perfeitamente o índice. No entanto, tem várias desvantagens significativas, por exemplo: a inclusão de todos os ativos pode não ser prática, especialmente quando o índice contém ativos ilíquidos; e alocar capital em todos os ativos também acarretaria um custo de negociação significativo. O segundo método é usar derivativos, como contratos futuros, para rastrear o índice. A vantagem dos contratos futuros é que o custo de negociação é relativamente menor do que ações, no entanto, rastrear dinamicamente o índice pode ser caro e temerário por causa dos riscos envolvidos. Essas desvantagens

tornam os contratos futuros menos atrativos no rastreamento do índice. Para tornar o rastreamento do índice mais prático (ou seja, custo de negociação relativamente menor e menos arriscado), um terceiro método foi proposto: usar um subconjunto de ações para rastrear o índice com apenas um pequeno sacrifício no erro de rastreamento. Esse método é chamado de rastreamento de índice esparso e, na verdade, é o principal negócio dos fundos negociados em bolsa, que agora são muito populares nos mercados e será abordado neste trabalho.

2.8.1. Rastreamento de Índice Aprimorado

Neste trabalho, apresentamos uma solução analítica para um problema de estratégia de rastreamento de índice aprimorado, em inglês, *Enhanced Index Tracking*. Rastreamento de Índice Aprimorado é uma estratégia utilizada que visa obter retornos acima do índice de referência (*excesso de retorno*), minimizando o erro de rastreamento (*tracking error*).

O excesso de retorno ou *Excess Return*, representa o quanto o *tracking portfolio* supera o índice de referência do mercado, ou *benchmark portfolio*. Abaixo, na apresentação do Modelo Matemático da Estratégia Rastreamento de Índice Aprimorado, visualizamos a estratégia de Rastreamento de Índice Aprimorado com o uso da variável u_e (excesso de retorno médio) em (8).

Consideramos uma abordagem na qual o portfólio de rastreamento é composto de um determinado subconjunto de ativos, e a função objetivo do rastreamento de índice aprimorado é escrita com um *trade-off* entre o erro de rastreamento e o excesso de retorno, balanceado por uma escolha apropriada de um parâmetro de aversão ao risco.

2.8.2. Modelo Matemático da Estratégia Rastreamento de Índice Aprimorado

Com base no trabalho de Feng e Palomar (2016), é considerado o *tracking portfolio* composto por uma quantidade *n* de ativos; $w = (w_1 \dots w_n)'$ será o vetor com os pesos dos ativos que compõem o *tracking portfolio* e $R = (R_1 \dots R_n)'$, o vetor com o retorno dos ativos. O modelo matemático de *Enhanced Index Tracking* é dado por:

$$\text{Min } F(w) = \sigma_e^2 - \phi u_e \qquad (8)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i \geq w_i^- \,, i = 1, \ldots, n \,,$$

$$w_i \leq w_i^+ \,, i = 1, \ldots, n \,,$$

em que:

- $F(w)$ é uma função quadrática para o rastreamento de índice aprimorado composta por:

- σ_e^2 é o erro de rastreamento (*tracking error*), definido como $\sigma_e^2 = w'\Sigma w - 2\sigma_M^2 w'\beta + \sigma_M^2$, onde $\beta = (\beta_1 \ldots \beta_n)'$ é o vetor de índices do portfólio (beta das ações) e σ_M^2 é a variância do índice de mercado;

- u_e é o excesso de retorno médio, definido como $u_e = w'r - u_M$, onde u_M é o retorno do índice de mercado e r é o vetor com os retornos dos ativos;

- $\phi \geq 0$ é um parâmetro de regularização (*trade-off*) para o excesso de retorno médio e permite definir um equilíbrio entre o risco e o retorno esperado. Não há um valor específico para este parâmetro, a escolha deste valor dependerá do grau de aversão ao risco do investidor. Se um investidor for mais agressivo, ele definirá um valor menor quando comparado a um investidor mais conservador, que definirá um valor maior para este parâmetro. Neste problema, valores maiores para ϕ faz com que o retorno do *tracking portfolio* fique mais próximo do retorno do índice de mercado, gerando assim menor risco relativo. Para valores menores de ϕ, o retorno do portfólio tende a ser maior que o retorno do índice de mercado, porém gerando maior risco relativo.

- $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ é uma restrição que indica que a soma de todos os pesos deve ser igual a 1.
- w_i^- e w_i^+ são a proporções, mínima e máxima, que devem ser mantidas pelo ativo *i*, respectivamente.

2.9. Paridade de Risco

Paridade de Risco, em inglês, *Risk Parity*, é uma estratégia para gerenciar investimentos, em que todos os investimentos de um portfólio estarão no mesmo nível

de contribuição de risco. Esta estratégia não é complexa, a simplicidade é uma das chaves do sucesso. Com ela conseguimos entender e planejar melhor os riscos. O foco principal da paridade de risco é a alocação dos recursos igualando as contribuições de risco para todos os ativos que compõem o portfólio.

Na crise financeira de 2008, a estratégia de paridade de risco ficou mais conhecida e ganhou força. Após a crise, investidores em geral revisaram suas expectativas de retorno e o nível de aversão ao risco aumentou consideravelmente. No contexto geral, o gerenciamento dos riscos se tornou mais importante que o gerenciamento do desempenho.

Existem duas maneiras de construir uma estratégia de paridade de risco: com ou sem alavancagem (*leverage*). Quando as alocações dos investimentos são ajustadas e alinhadas pelo risco, independentemente da alavancagem, este portfólio pode ser mais resistente às recessões do mercado comparando com um portfólio tradicional. A tendência é obter menor volatilidade, apesar de que este não é o objetivo, mas na média o que se consegue são volatilidades intermediárias. O foco é a homogeneização do risco.

Conforme já citado anteriormente, Markowitz foi pioneiro, na década de 50, no tema de diversificação, e foi justamente nesta década, que surgiram todos os componentes teóricos que dão base à estratégia de paridade de risco. O termo *Risk Parity*, foi primeiramente usado por Qian (2005), porém o primeiro fundo de investimento de paridade de risco já havia surgido antes, em 1996, chamado de *All Weather*, da *Bridgewater Associates*, que ficou conhecida precisamente por inovar em estratégias de investimentos. Este fundo *All Weather* é um dos maiores fundos nos EUA e foi responsável pelo crescimento da empresa em mais de sete vezes em um período de 10 anos que compreende desde a época antes do surgimento deste fundo de paridade de risco até o período em que este fundo já estava estabelecido. Não é por acaso que a empresa foi classificada como a administradora de bônus global de melhor desempenho, e grande parte deste crédito foi graças à estratégia de paridade de risco.

Como visto, em termos práticos, a paridade de risco surgiu com a *All Weather*, porém do ponto de vista teórico, o registro mais importante foi descrito através do trabalho teórico de Maillard *et al*. (2010) onde todos as propriedades analíticas foram exploradas. Em particular, eles mostraram que este portfólio existe, é único e está

localizado entre os portfólios de mínima variância (*minimum variance*) e ponderados (*equally weighted*).

Para Roncalli (2013(a)), paridade de risco é um exemplo de método heurístico. Segundo ele, o termo "heurístico" se refere a técnicas baseadas na experiência e métodos de tentativa e erro para encontrar uma solução, que não corresponde à solução ótima de um problema de otimização. Ainda segundo Roncalli, a ideia subjacente é construir um portfólio balanceado de forma que as contribuições de risco sejam as mesmas para diferentes ativos, assim o portfólio ficará ponderado igualmente em termos de risco e não em termos de pesos.

Basicamente, para montar uma estratégia de paridade de risco, primeiro devem-se definir os riscos, índices ou classes que se deseja ter exposição, depois são necessárias as volatilidades de cada índice e então calcula-se um fator (k) para chegar ao peso de cada classe. Com isso obtém-se a vantagem de ter baixa tendência de concentração de boa parte dos recursos em apenas um ou poucos ativos e o risco de concentração será muito menor.

Esta estratégia ainda é relativamente nova e diferenciada, principalmente no Brasil, onde não encontramos muitos registros a respeito e trabalhos que tratam do assunto. A paridade de risco não estima retornos futuros e não exige grandes conhecimentos do mercado financeiro, porém requer uma gestão forte e supervisão contínua para reduzir o potencial de consequências negativas. A paridade de risco pode ser considerada como uma solução definitiva para os problemas de alocação de portfólios, porém deve-se ter cautela com este pensamento. Paridade de risco continua sendo um modelo de investimento financeiro e seu desempenho continua dependendo das escolhas e decisões dos investidores quanto aos parâmetros utilizados. Assim que, escolher corretamente o universo de investimentos é tão importante quanto usar o método de alocação apropriado.

A abordagem de paridade de risco busca proporcionar o melhor portfólio para diferentes condições de mercado, com um nível razoável de conservadorismo, conforme afirma VisiaInvestimentos (2016).

2.9.1. Princípio de Alocação de Euler

A mensuração do risco é apenas a primeira etapa do gerenciamento de risco de portfólios. Deve ser completado por uma segunda etapa que consiste em decompor a carteira de risco em uma soma de contribuições de risco por ativos. Este segundo passo é também chamado de alocação de risco. O conceito de contribuição de risco é fundamental na identificação de concentrações e na compreensão do perfil de risco do portfólio, e existem diferentes métodos para defini-los. Alguns métodos são mais pertinentes que outros e o princípio de Euler é certamente o mais usado e aceito (Roncalli, 2013(a)). Não é com toda medida de risco que esta regra/decomposição acontece, porém isso acontece com o desvio padrão em portfolios de paridade de risco, onde vemos essa soma das contribuições (das contribuições iguais).

A medida de risco $R(w)$ é definida em termos de pesos. A contribuição de risco (RC) do ativo i é exclusivamente definida como:

$$RC_i = w_i \frac{\partial R(w)}{\partial w_i} \qquad (9)$$

e a medida de risco satisfaz a decomposição de Euler:

$$R(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial R(w)}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^{n} RC_i. \qquad (10)$$

Esse relacionamento é chamado de princípio de alocação de Euler. É o núcleo dos portfólios de paridade de risco e atualmente é usado intensivamente por profissionais da área (Roncalli, 2013(a)).

2.9.2. Modelo Matemático da Estratégia Paridade de Risco

Como já visto anteriormente, a estratégia de paridade de risco não leva em consideração a perspectiva de retorno esperado. É considerado o nivelamento em relação ao risco. Usando a estratégia de paridade de risco, buscamos um portfólio em que a contribuição de risco de cada um dos ativos que compõem este portfólio seja igual.

Abaixo, está o modelo matemático desta estratégia, definido por Maillard *et al.* (2010), no qual é detalhado como calcular a contribuição de risco de cada ativo, riscos estes, sendo do tipo marginal e total do portfólio.

Considere um portfólio com n ativos, $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, a variância de cada ativo i (σ_i^2), a covariância entre o ativo i e j (σ_{ij}) e a matriz de covariâncias (Σ). A contribuição de risco ou volatilidade (σ) do portfólio é encontrada da seguinte forma:

$$\sigma(w) = \sqrt{w^T \Sigma w} = \Sigma_i {w_i}^2 {\sigma_i}^2 + \Sigma_i \Sigma_{j \neq i} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Então, o risco marginal é definido sendo $\partial_{w_i} \sigma(w)$, e é dado por:

$$\frac{\partial\, \sigma(w)}{\partial_w} = \frac{w_i \sigma_i^2 + \Sigma_{j \neq i} w_j \sigma_{ij}}{\sigma(w)} = \frac{\Sigma w}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

O termo "marginal" qualifica o fato que, estas quantidades alteram a volatilidade do portfólio induzida por um pequeno aumento do peso de um ativo.

Temos como a contribuição de risco de um determinado ativo definida por:

$$\sigma_i(w) = w_i \times \frac{(\Sigma w)_i}{\sqrt{w^T \Sigma w}}$$

Assim, o risco do portfólio $\sigma(w)$ é a somatória das contribuições totais de risco de todos os ativos que compõem este portfólio, verificando a propriedade de alocação completa:

$$\sigma(w) = \Sigma_{i=1}^{n} \sigma_i(w)$$

Sendo definida a contribuição total de um determinado ativo, $\sigma_i(w)$, a idéia da estratégia da paridade de risco é justamente criar um portfólio equilibrado pelo risco, de modo que a contribuição de risco (também conhecida como "risco de componente") seja a mesma para todos os ativos do portfólio, isto é, $\sigma_1(w) = \sigma_2(w) = \cdots = \sigma_n(w)$, para um portfólio com *n* ativos.

Considere *w* como o vetor de pesos, isto é, quanto será investido em cada ativo (parcela), $0 \leq w_i \leq 1$ e a soma de todos os pesos igual a 1. Dessa forma, um portfólio com a estratégia de paridade de risco pode ser definido da seguinte maneira, satisfazendo ao princípio de Euler:

$$w^* = \{w \in [0,1]^n : \sum w_i = 1,\ w_i \times \partial_{w_i} \sigma(w) = w_j \times \partial_{w_j} \sigma(w)\ para\ todos\ i,j\} \quad (11)$$

2.10. Portfólios Esparsos

Para Mitra *et al*. (2013), para controlar custos de transações ou para regular outros problemas de controle ou monitoramento, alguns investidores podem desejar limitar o número de ativos mantidos em seus portfólios.

As estratégias apresentadas anteriormente, rastreamento de índice e paridade de risco, quando usadas em conjunto, resultam em altos custos de transações, pois espera-se que se invista em todos os ativos disponíveis. O uso de portfólios esparsos resolve este problema, pois possibilita selecionar um número reduzido de ativos, regularizando esta quantidade e promovendo a esparsidade.

A idéia da esparsidade é trabalhar somente com os elementos não nulos de um vetor. Uma solução mais esparsa (dispersa), quer dizer que esta solução tem menos entradas não-zero, portanto, menos ativos selecionados. Um portfólio esparso é um portfólio com poucas posições ativas, ou seja, apenas alguns pesos (w) serão diferentes de zero, Song *et al*. (2015).

Conforme Feng e Palomar (2016), com o uso da norma l_0, é possível regularizar a cardinalidade dos pesos do portfólio e dessa maneira, contornar o problema de cardinalidade, para a obtenção da esparsidade, assim aplicado neste trabalho.

O resultado do uso de portfólios esparsos é a redução significativa do número de ativos selecionados e consequentemente, a redução da quantidade de transações e seus custos gerais. Essa redução de custos é importante, pois viabilizará o uso destas estratégias de investimento em conjunto e a obtenção de seus benefícios.

3. Otimização de portfólios com estratégias de Rastreamento de Índice Aprimorado e Paridade de Risco com Esparsidade

Este capítulo descreve o modelo proposto de otimização de portfólios em que as estratégias *enhanced index tracking* e *risk parity* serão usadas em conjunto. Também será apresentada a solução proposta do problema, com detalhamento do algoritmo a ser implementado.

3.1. O Problema

Como é sabido, as estratégias de rastreamento de índice e paridade de risco em conjunto, resultam em altos custos de transação, diminuindo o retorno geral esperado, pois espera-se que se invista em todos os ativos do portfólio. Para superar essa desvantagem e com esta motivação, é proposto um método para selecionar conjuntamente apenas alguns dos ativos e distribuir o capital entre os ativos selecionados, de forma que o risco seja diversificado.

Considere o *tracking portfolio* composto por uma quantidade *n* de ativos previamente especificados. Denotamos por $w = (w_1, \cdots, w_n)'$, o vetor com os pesos dos ativos que compõem o *tracking portfolio*, $R = (R_1, \cdots, R_n\ )'$, o vetor aleatório com o retorno dos ativos e $\Sigma = E\big((R - r)(R - r)'\big)$, a matriz de covariâncias de R, com $r\ =\ E(R)$. O erro ou diferença entre o retorno obtido do *tracking portfolio* e do retorno obtido do *benchmark portfolio* está definido como $P_e = w'R - R_M$, onde R_M é o retorno do índice de mercado, com $u_M = E(R_M)$. Então, o excesso de retorno médio, é definido como $u_e =\ w'r -\ u_M$ e o erro de rastreamento (*tracking error* ou a variância de P_e), é definido como $\sigma_e^2\ = w'\Sigma w - 2\sigma_M^2 w'\beta + \sigma_M^2$ onde $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n\ )'$ é o vetor de índices do portfólio (beta das ações), u_M é o retorno do índice de mercado e *r* é o vetor com os retornos dos ativos.

O índice β é um indicador financeiro que permite distinguir ativos menos ou mais agressivos (risco sistemático ou sistêmico), portanto através deste índice que conseguiremos dividir o nível de risco dos ativos. É a relação entre a variação do retorno de um ativo e o mercado.

O termo σ_M^2 é a variância do índice de mercado. Além disso, consideramos a volatilidade do *tracking portfolio* como sendo uma medida de risco, $\sigma\,(\mathrm{w}) = \sqrt{w'\Sigma \mathrm{w}}$, então a contribuição de risco (RC) para cada ativo i em relação ao risco do portfólio é dada como $RC_i(w) = w_i \frac{(\Sigma \mathrm{w})i}{\sqrt{w'\Sigma \mathrm{w}}}$, satisfazendo ao princípio de Euler, assim como definido em Roncalli (2013(a), p. 77).

O modelo matemático da estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco é:

$$\min J(w) \;=\; F(w) \qquad (12)$$

$$\text{Sujeito a} \qquad RC_i\,(w) = RC_j\,(w) \qquad \forall i, j$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i \geq w_i^-,\ i = 1, \ldots, n,$$

$$w_i \leq w_i^+,\ i = 1, \ldots, n,$$

F(w) será a função que faz o rastreamento de índice aprimorado, $F(w) \;=\; \sigma_e^2 \;-\; \phi u_e$.

A restrição $RC_i\,(w) = RC_j\,(w)$ garante a paridade de risco.

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ é uma restrição que indica que a soma de todos os pesos deve ser igual a 1.

w_i^- e w_i^+ são a proporções mínima e máxima, que devem ser mantidas pelo ativo i, respectivamente, então $w_i^- \geq 0$, representa a condição em que a venda a descoberto não é permitida (para $w_i^- < 0$ vendas a descoberto são permitidas).

Desta maneira, temos um problema que trata das estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco, porém ainda resultando em altos custos de transação, pois se espera que se invista em todos os ativos do portfólio.

3.2. Solução do Problema

O método utilizado para a solução do modelo proposto foi descrito no artigo "*Portfolio optimization with asset selection and risk parity control*" ou em português "Otimização de portfólio com seleção de ativos e controle de paridade de risco", dos

autores Yiyong Feng e Daniel P. Palomar publicado em 2016 na *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*.

O problema de otimização de portfólios tratado neste trabalho, é similar ao problema apresentado em Maillard *et al.* (2010). No problema de Maillard *et al.* (2010), é usado mínimos quadrados para resolver a paridade de risco. Considerando esta abordagem, o problema (12) será definido como:

$$\min J(w) \;=\; F(w) \;+ \delta \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(RC_i\,(w) - RC_j\,(w) \right)^2 \qquad (13)$$

$$\text{Sujeito a} \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i \geq w_i^{-},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$w_i \leq w_i^{+},\ i = 1, \ldots, n,$$

A solução deste problema será um *tracking portfólio* com paridade de risco, isto é, a mesma contribuição de risco em todos os ativos.

A função $F(w)$ deve ser quadrática e convexa. O termo $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(RC_i\,(w) - RC_j\,(w) \right)^2$ é adicionado à função objetivo e a restrição de paridade é eliminada. Neste caso, $RC_i\,(w)$ e $RC_j\,(w)$ diferentes entre si são penalizados e a minimização deste termo garante a paridade de risco do portfólio. δ é um parâmetro de regularização (*trade-off*).

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ é uma restrição que indica que a soma de todos os pesos deve ser igual a 1. w_i^{-} e w_i^{+} são a proporções mínima e máxima, que devem ser mantidas pelo ativo *i.*

A função $J(w)$ não é quadrática por causa do termo que representa a paridade de risco. Uma alternativa proposta por Bai *et al.* (2015) é usar o termo $\theta = \frac{\sum_{j=1}^{n} RC_j\,(w)}{n}$ definido com a média das contribuições de risco. A nova função objetivo será $J(w) = F(w) + \delta R(w, \theta)$, onde $R(w, \theta) = \sum_{i=1}^{n} (RC_i\,(w) - \theta)^2$.

Segundo Feng e Palomar (2016), a solução do problema acima implica em altos custos transacionais, pois todos os ativos do portfólio participam da solução. Para reduzir estes custos, uma solução possível é a seleção de apenas alguns dos ativos,

investir neles respeitando a paridade de risco. Neste caso teríamos como solução um portfólio esparso.

Para resolver o problema da esparsidade, Feng e Palomar (2016) propõem o uso da norma l_0. A norma l_0 é definida como o número total de elementos *non-zeros* em um vetor, ou seja, regulariza a quantidade de ativos e promove a esparsidade.

Com base no trabalho de Feng e Palomar (2016), consideramos uma função de custo generalizada dada por:

$$J(w) = F(w) + \delta R(w,\theta) + \varrho||w||_0 \tag{14}$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i \geq w_i^- \ , i = 1, ..., n \ ,$$

$$w_i \leq w_i^+, i = 1, ..., n \ ,$$

onde F(w), é uma função convexa. Neste trabalho, representada pelo rastreamento de índice aprimorado, $F(w) = \sigma_e^2 - \phi u_e$.

A concentração de risco, $R(w,\theta)$, será definida como:

$$R(w,\theta) = \sum_{i=1}^{n} (RC_i\,(w) - \theta)^2 \mathbb{1}_{\{w_i \neq 0\}}. \tag{15}$$

em que

- θ (*theta*), é uma variável que representa a média das contribuições de risco dos ativos selecionados ($w_i \neq 0$) e a função indicadora ($\mathbb{1}$) é uma função não convexa, lembrando que o valor dela será 1 se *w* for maior que zero e será 0 se *w* for igual a zero;
- $||w||_0 = \sum_i^n \mathbb{1}_{\{w_i \neq 0\}}$ é a norma l_0 que regulariza a cardinalidade dos pesos do portfólio, para possibilitar a esparsidade;
- δ e ϱ são parâmetros de regularização (*trade-off*). Observe que o parâmetro ϱ controla a dispersão do *tracking portfolio*. O parâmetro ϱ regulariza o número de ações e promove a esparsidade, e a regularização feita por δ tende a distribuir o risco entre os ativos selecionados;

- $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ é uma restrição que indica que a soma de todos os pesos deve ser igual a 1;
- No modelo que resolveremos neste trabalho, não será permitida a venda a descoberto (*short-selling*), w_i^- e w_i^+ são a proporções mínima e máxima, que devem ser mantidas pelo ativo *i*, respectivamente, então $w_i^- \geq 0$, representa a condição em que a venda a descoberto não é permitida (para $w_i^- < 0$ vendas a descoberto são permitidas).

Os principais desafios são as funções de $RC_i(w)$, $\mathbb{1}_{\{w_i \neq 0\}}$ e $R(w, \theta)$. Cada função $RC_i(w)$ não é convexa, a função indicadora $\mathbb{1}_{\{w_i \neq 0\}}$ é não-convexa, não-diferenciável e descontínua e, $R(w, \theta)$ é não-convexa e não-diferenciável.

Assim, os autores Feng e Palomar (2016) apresentam a abordagem de solução que lida com essas dificuldades apresentadas acima. Eles primeiramente aproximam o problema, para um problema não-convexo, mas diferenciável. Em seguida, derivam para uma abordagem de resolução baseada em aproximação convexa sucessiva (ACS) do problema aproximado.

A ideia da ACS, apresentada por Feng e Palomar (2016), é aproximar a função original, não convexa, a cada iteração, em um problema convexo solucionável e obter uma atualização dos valores de θ (*theta*) e de w *(*pesos*)*. Trabalhar com um problema convexo, é menos complexo, pois é garantida uma solução ótima. A resolução deste problema, via ACS, se dá através da atualização de θ (*theta*) e de w *(*pesos*)*.

Para a atualização de w *(*pesos*)*, são apresentados dois métodos diferentes. O primeiro método é a aproximação linear de primeira ordem, onde o objetivo é construir uma aproximação linear por partes, e o segundo método é a aproximação quadrática de segunda ordem, onde se faz a aproximação por uma função quadrática convexa. Ambos os métodos utilizam da definição matemática de aproximação detalhada previamente na seção 2.5., onde foi apresentada a aproximação convexa sucessiva, ACS. De acordo com os autores Feng e Palomar (2016), de um modo geral, a aproximação de primeira ordem é a que melhor aproxima o indicador, no entanto, a aproximação de segunda ordem pode resultar em expressões de atualização mais simples, para alguns casos e restrições especiais, quando estiver usando restrições lineares com equações de igualdade, por exemplo. Na implementação, ambas as aproximações serão consideradas.

Feitas as devidas correções, as atualizações, de θ (*theta*) e *w*, via os métodos apresentados, são utilizadas para atualizar o problema, substituindo e removendo as constantes respectivamente. Desta maneira, temos agora um problema (16) que trata das estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco em portfólios esparsos, assim diminuindo os custos de transação, pois é possível selecionar conjuntamente apenas alguns dos ativos e não se espera obrigatoriamente que se invista em todos os ativos do portfólio.

3.2.1. Problema Final

O problema final é apresentado conforme abaixo:

$$\min F(w) + \lambda_1 ||D_0^k w||_0^0 + \lambda_2 P\,(w, \theta^k) + \tau\, ||w - \mathrm{w}^k||_2^2 \qquad (16)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w \in W,$$

onde, F(w) pode representar outras metas de investimento para que a formulação proposta possa ser aplicada em muitos cenários. Neste trabalho, $F(w)$ é a função que representa o rastreamento de índice aprimorado (*enhanced index tracking*), $F(w) = \sigma_e^2 - \phi u_e$, onde $\phi \geq 0$ é o parâmetro de regularização que permite definir um equilíbrio entre o risco e o retorno esperado. Não há um valor específico para este parâmetro, a escolha deste valor dependerá do grau de aversão ao risco do investidor. Se um investidor for mais agressivo, ele definirá um valor menor quando comparado a um investidor mais conservador, que definirá um valor maior para este parâmetro. Neste problema, valores maiores para ϕ faz com que o retorno do portfólio fique mais próximo do retorno do índice de mercado, gerando assim menor risco relativo. Para valores menores de ϕ, o retorno do portfólio tende a ser maior que o retorno do índice de mercado, porém gerando maior risco relativo. O termo k representa uma iteração do "*Algoritmo 1 SCA*" apresentado na seção 3.2.2..

O termo, $\lambda_1 ||D_o^k w||_o^o$, representa a esparsidade, onde $o = 1$ ou $o = 2$ denota a aproximação de primeira ordem ou de segunda ordem, respectivamente, sendo $\lambda_1 \geq 0$, um parâmetro regulador (*trade-off*).

O termo $\lambda_2 P\,(w, \theta^k)$, representa a paridade de risco, sendo $\lambda_2 \geq 0$, um parâmetro regulador (*trade-off*).

E finalmente, o termo $\tau\,||w - \mathrm{w}^k||_2^2$, com $\tau > 0$, foi adicionado pelos autores Feng e Palomar (2016) por razões de convergência.

A restrição $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, denota a restrição do orçamento de capital e W ($w \in W$) é um conjunto convexo que denota as restrições do mercado e dos perfis dos investidores.

Portanto, temos então um problema (16) de otimização de portfólio de rastreamento de índice aprimorado com esparsidade e paridade de risco. Este problema final é convexo e pode ser resolvido pelos *solvers* existentes no mercado, como por exemplo o MOSEK ou o CPLEX. O *solver* utilizado na implementação deste trabalho foi o MOSEK, (MOSEK 2018).

3.2.2. Algoritmo de Resolução do Problema Final

Os autores, Feng e Palomar (2016), propõem um algoritmo (*Algoritmo 1 SCA*) iterativo que garante a convergência para um ponto estacionário do problema final aproximado e atualizado (16). O *Algoritmo 1 SCA*, é definido por esses autores, como um algoritmo para otimização de *portfólio* sob seleção de ativos e controle de paridade de risco. A descrição do mesmo é mostrada abaixo:

Algoritmo 1 SCA

---

* **Entrada:** k = 0, $\mathrm{w}^0 \in \overline{W}$, $\theta^0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0\, g_i(\mathrm{w}^0)$, $\tau > 0, \{\gamma^k\} > 0$

* **Saída:** Um ponto estacionário do problema aproximado

Repetir

Passo 1: Calcular x_i^k, $x_i^k = \frac{(p_p^{\epsilon}(w_i^k))^2}{\sum_{j=1}^{n}(p_p^{\epsilon}(w_j^k))^2}$

Passo 2: Calcular $\hat{\theta}$, $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{n} x_i^k g_i(\mathrm{w}^k)$

Passo 3: Calcular θ^{k+1}, $\theta^{k+1} = \theta^k + \gamma^k(\hat{\theta}^k - \theta^k)$

Passo 4: Resolver Problema Final (16) para obter a solução ótima de $\widehat{w}^k$ usando o Mosek.

Passo 5: Calcular w^{k+1}, $\mathrm{w}^{k+1} = \mathrm{w}^k + \gamma^k(\widehat{\mathrm{w}}^k - \mathrm{w}^k)$

Passo 6: k ⟵ k + 1

até a convergência

Segundo os autores, Feng e Palomar (2016), o algoritmo converge em um número finito de iterações para um ponto estacionário do problema aproximado. Um ponto estacionário, também conhecido como ponto crítico, é um ponto onde a derivada da função é igual a zero. Pode ser um ponto mínimo, máximo ou de inflexão.

Como citado anteriormente (Seção 3.2.1.), $F(w)$ representa qualquer meta de investimento que se deseja implementar. Podemos usar qualquer $F(w)$ desde que faça sentido, assim o algoritmo apresentado acima, ainda poderá ser utilizado com este $F(w)$. Neste trabalho, $F(w)$ é a função que representa o rastreamento de índice aprimorado. A resolução deste trabalho, consistiu em reutilizar este algoritmo fornecido por Feng e Palomar, fazer modificações e implementar a função $F(w)$ de rastreamento de índice aprimorado para poder atingir o objetivo do trabalho. Neste trabalho não está sendo verificada a *performance* do método ou do algoritmo. A validação será feita do ponto de vista do investidor, do ponto de vista financeiro.

4. Implementação e Resultados Numéricos

Este capítulo trata de todos os assuntos técnicos relacionados aos testes e resultados numéricos. Será apresentado o *software,* o equipamento utilizado e detalhados os testes e respectivos resultados. Conclui com a análise dos resultados encontrados a partir das fontes de dados utilizadas.

Neste trabalho, não será verificada a *performance* do método ou algoritmo. A validação será feita desde o ponto de vista do usuário investidor, do ponto de vista financeiro, isto é, se o objetivo da estratégia de investimento está sendo alcançado ou não. O método utilizado como ferramenta para a resolução do problema é o algoritmo "*Algoritmo 1 SCA*", que conforme já citado anteriormente, foi cedido por Feng e Palomar, apresentado no capítulo anterior. Para a validação, serão usados indicadores detalhados posteriormente neste capítulo.

A análise final do resultado será a partir de gráficos e tabelas, onde temos cenários comparativos envolvendo três casos: estratégia de rastreamento de índice aprimorado (Caso 1), estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco sem esparsidade (Caso 2) e estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade (Caso 3 - solução proposta); todos usando como referência o índice do mercado (*benchmark* portfólio).

4.1. Fonte de Dados

Para fins de testes e experimentos, utilizamos duas bases de dados:

1. Base I: Base **BM&FBOVESPA (BVMF)** de um período de aproximadamente 5 anos, de Dezembro de 2009 à Abril de 2015 e
2. Base II: Base **S&P 500** de Maio de 2010 à Julho de 2014.

Três diferentes portfólios, com 10 ativos (S&P 500), 20 ativos e 40 ativos (BM&FBOVESPA) foram utilizados, sendo que no portfólio de 40 ativos da BM&FBOVESPA, metade são os mesmos ativos da outra base de 20 ativos da BM&FBOVESPA. Estes dados foram organizados em planilhas Excel contendo todas as informações necessárias para a execução dos cálculos, geração dos gráficos e respectivos indicadores e por fim, para a realização das análises e conclusões.

Nas planilhas Excel, temos o valor (preço) de cada um dos ativos correspondente ao último dia útil de cada um dos meses dos períodos mencionados acima. Desta forma, temos matrizes de valores de m por n, onde m e n para os dados da BM&FBOVESPA são iguais a 64 e 40 e para os dados da S&P 500 são iguais a 69 e 10, respectivamente para quantidade de datas (meses) do período e quantidade de ativos.

Os 40 ativos trabalhados da BM&FBOVESPA são: VALE3, GGBR4, CCRO3, BBAS3, TIMP3, CIEL3, CMIG4, EMBR3, CSNA3, BRFS3, POMO4, USIM5, SUZB5, BRML3, BBDC3, LAME4, SANB11, CRUZ3, HYPE3, GFSA3, VIVT4, MRFG3, SBSP3, OIBR4, CPFE3, BRPR3, ESTC3, MRVE3, GOAU4, BRKM5, DTEX3, CTIP3, CYRE3, ENBR3, ELET3, BRAP4, FIBR3, ELET6, TBLE3 e ECOR3.

Os 10 ativos trabalhados da S&P 500 são: APA, CAT, APC, HPQ, ABT, CHK, ALB, AAP, KR e AJG. Detalhes de todos estes ativos estão especificados nos Apêndices A e B, respectivamente, deste trabalho.

Ainda nas planilhas Excel, temos outras pastas de trabalho, uma para cada conjuntos de dados (10, 20 e 40 ativos) que contém os seguintes dados relevantes para o estudo: Valor da média ponderada de retorno para cada um dos ativos para todo o período especificado (vetor com os retornos dos ativos (r)); Média geral dos índices (retorno do índice de mercado (u_M)); Índice Beta para cada ativo ($vetor\ de\ betas\ dos\ ativos\ (\beta)$), que é calculado como sendo a covariância entre os retornos do referido ativo e índices de cada data, dividido pela variância destes índices; Variância dos índices por todo o período avaliado ($variância\ do\ índice\ de\ mercado\ (\sigma_M^2)$) e a Matriz de Covariâncias dos retornos dos ativos ($matriz\ de\ covariância\ de\ r\ (\Sigma)$).

A Figura 5 apresenta a planilha Excel da base de dados S&P 500, com os dados utilizados na implementação.

	APA	CAT	APC	HPQ	ABT	CHK	ALB	AAP	KR	AJG	Index
Retornos médios	-0,00353	0,00480	0,00540	-0,00280	0,00860	-0,00428	0,01053	0,01803	0,01939	0,00977	**0,00978**
Betas	1,57800	1,64800	1,72800	1,61500	0,90000	1,76800	1,88500	0,79400	0,71700	1,02000	**1,00000**
Variância	0,00675	0,00716	0,01144	0,01074	0,00191	0,01022	0,00864	0,00465	0,00341	0,00210	**0,00127**

Matriz de Covariâncias	APA	CAT	APC	HPQ	ABT	CHK	ALB	AAP	KR	AJG
APA	0,00917	0,00527	0,00701	0,00374	0,00098	0,00907	0,00540	0,00054	-0,00039	0,00196
CAT	0,00527	0,00663	0,00518	0,00402	0,00121	0,00504	0,00583	0,00188	0,00032	0,00218
APC	0,00701	0,00518	0,00886	0,00401	0,00142	0,00979	0,00507	0,00159	0,00072	0,00252
HPQ	0,00374	0,00402	0,00401	0,00967	0,00168	0,00394	0,00495	0,00140	0,00122	0,00245
ABT	0,00098	0,00121	0,00142	0,00168	0,00254	0,00102	0,00130	0,00082	0,00123	0,00133
CHK	0,00907	0,00504	0,00979	0,00394	0,00102	0,02473	0,00400	0,00138	-0,00092	0,00271
ALB	0,00540	0,00583	0,00507	0,00495	0,00130	0,00400	0,00909	0,00161	0,00107	0,00241
AAP	0,00054	0,00188	0,00159	0,00140	0,00082	0,00138	0,00161	0,00474	0,00101	0,00150
KR	-0,00039	0,00032	0,00072	0,00122	0,00123	-0,00092	0,00107	0,00101	0,00353	0,00079
AJG	0,00196	0,00218	0,00252	0,00245	0,00133	0,00271	0,00241	0,00150	0,00079	0,00229

Figura 5. Exemplo da Planilha Excel da base de dados da S&P 500 (10 ativos).

O mesmo conjunto de dados da BM&FBOVESPA para 20 e 40 ativos foi utilizado. Os valores das variáveis utilizadas na implementação: r, u_M, β, σ_M^2 e Σ das bases com 10, 20 e 40 ativos, estão listados nos Apêndices C, D e E, respectivamente, deste trabalho.

4.2. *Softwares* e *Hardware* Utilizados

O algoritmo "*Algoritmo 1 SCA*", fornecido por Feng e Palomar, foi implementado em MATLAB. O solver MOSEK foi utilizado para resolver o problema final (16) que corresponde ao passo 4 do algoritmo "*Algoritmo 1 SCA*".

O MOSEK (MOSEK 2018), é um pacote de *software* utilizado para a solução de problemas de otimização matemática linear, quadrática, cônica e convexa não linear. A ênfase do MOSEK está na solução de problemas esparsos em larga escala. A interface utilizada foi o MOSEK *optimization toolbox for* MATLAB. Por ser implementado no MATLAB, utiliza funções e comandos em comum. O MOSEK efetivamente transforma o MATLAB numa linguagem de modelagem para solucionar problemas de otimização convexa que facilita a manipulação dos resultados obtidos na solução do problema e a integração desse problema a um projeto maior, no qual o problema de otimização é um dos componentes.

A licença utilizada foi a acadêmica (sem custo), solicitada na própria página do MOSEK, que suporta vários tipos de problemas padrões, incluindo programação linear, programação quadrática, entre outras.

As características do equipamento (*hardware*) utilizado nos experimentos numéricos estão descritas na Tabela 3.

Tabela 3. Características do equipamento utilizado.

Tipo	Modelo	Sistema Operacional	Processador	Memória (RAM)
Laptop	Dell Latitude E6420	Windows 7 Professional SP1 64-bit	Core i5 2.5GHz	8GB

4.3. Resultados

Para fins de testes, conforme já comentado anteriormente, foram criados diversos cenários comparativos usando como referência o índice do mercado (*benchmark portfólio*). Foram usados 3 portfólios (10, 20 e 40 ativos) e 3 casos: estratégia de rastreamento de índice aprimorado (Caso 1), estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco sem esparsidade (Caso 2) e estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade (Caso 3; solução proposta do problema final).

Conforme explicado no capítulo anterior, foi utilizado o código fornecido por Feng e Palomar, porém, algumas modificações se fizeram necessárias para que pudéssemos implementar a estratégia de rastreamento de índice aprimorado e realizar todos os testes de maneira consistente nos cenários propostos. As principais modificações no código estão descritas abaixo:

- Implementação do termo $F(w)$ que representa o rastreamento de índice aprimorado (*enhanced index tracking*) em (16), conforme podemos ver na seção Problema Final apresentada no capítulo 3;

- Eliminação do escalonamento da matriz de covariância. Segundo os autores, Feng e Palomar (2016), a matriz de covariância foi escalonada em 10^4 para evitar quaisquer problemas numéricos, sem fornecerem maiores detalhes. Durante os testes foi percebido que isso realmente se fazia necessário para a obtenção da esparsidade e paridade de risco, mas interferia no resultado esperado da estratégia de rastreamento de índice aprimorado;

- Ajuste dos parâmetros reguladores (*trade-off*) λ_1 e λ_2, que representam respectivamente a esparsidade e a paridade de risco, conforme visto na seção 3.2.1. onde

é apresentado o Problema Final. Originalmente λ_1 é definido como sendo igual a 0,1 e λ_2 é definido como sendo igual a 4, porém com a eliminação do escalonamento, para que todas as estratégias funcionassem como esperado, o novo valor para λ_1 foi definido como sendo $0{,}001$ e para λ_2 como sendo 100000. Estes valores foram encontrados de forma heurística;

- Outras modificações diversas que nada interferiram no funcionamento principal do código (alterações cosméticas), mas serviram para facilitar a experiência do usuário, como automatização da alimentação das bases descritas anteriormente, inclusão de diversos comentários no código para melhorar o entendimento e documentação, melhoria na aparência do resultado que é mostrado ao usuário, entre outras;

- E por fim inclusão de novo código para gerar o gráfico de análise das estratégias e indicadores de desempenho.

Foram mantidos os mesmos limites (inferior e superior) originais do código, limites que os pesos (w) podem assumir, ou seja, foram mantidas as mesmas restrições do código original, portanto, os pesos (w) sempre ficarão entre 0 (limite inferior) e 1 (limite superior).

Os indicadores que são utilizados para análise e interpretação dos resultados estão detalhados abaixo, são eles:

- Taxa de retorno excessivo positivo ou *positive excess return* (PER);

- Erro quadrático médio ou *root mean square* (RMS);

- Medida de desempenho, ou *indicator ratio* (IR), definida como $IR = PER/RMS$;

- Contribuição de risco, ou *risk contribution* (RC), para validar a existência da paridade de risco, calculada como $RC_i(w) = w_i \frac{(\Sigma \mathrm{w})i}{\sqrt{w'\Sigma \mathrm{w}}}$;

- A esparsidade é considerada quando pelo menos um dos ativos não for utilizado ou selecionado, ou seja, quando temos o valor $w = 0{,}0000$ para determinado(s) ativo(s).

Foram analisados doze cenários, detalhados na Tabela 4.

Tabela 4. Cenários Analisados.

Nº Cenário	Descrição	Qtde. de ativos do portfólio	Valor do Parâmetro de aversão ao risco ϕ
1	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 10 ativos e $\phi = \frac{1}{15}$	10	$\frac{1}{15}$
2	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 10 ativos e $\phi = 15$	10	15
3	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 10 ativos e $\phi = 1$	10	1
4	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 10 ativos e $\phi = 0$	10	0
5	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 20 ativos e $\phi = \frac{1}{15}$	20	$\frac{1}{15}$
6	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 20 ativos e $\phi = 15$	20	15
7	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 20 ativos e $\phi = 1$	20	1
8	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 20 ativos e $\phi = 0$	20	0
9	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 40 ativos e $\phi = \frac{1}{15}$	40	$\frac{1}{15}$
10	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 40 ativos e $\phi = 15$	40	15
11	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 40 ativos e $\phi = 1$	40	1
12	Comparativo dos casos 1, 2 e 3, com 40 ativos e $\phi = 0$	40	0

A seguir vemos os resultados dos cenários 1, 2, 3 e 4, que são os cenários comparativos dos casos 1, 2 e 3, com 10 ativos da S&P 500, com valor de ϕ (parâmetro de aversão ao risco) configurado como $\frac{1}{15}, 15, 1\ e\ 0$ respectivamente.

Abaixo temos um quadro resumo, representado na Tabela 5, contendo os valores dos indicadores utilizados para a interpretação dos resultados da estratégia de rastreamento de índice aprimorado, para estes cenários e respectivos casos:

Tabela 5. Indicadores dos cenários 1 ao 4.

Nome Cenário	PER - Caso1	PER - Caso2	PER - Caso3	RMS - Caso1	RMS - Caso2	RMS - Caso3	IR - Caso1	IR - Caso2	IR - Caso3
Cenário1	86,96	46,38	47,83	17,89	7,78	7,57	4,86	5,96	6,31
Cenário2	62,32	91,30	91,30	84,03	54,04	54,07	0,74	1,69	1,69
Cenário3	75,36	69,57	91,30	83,24	7,07	11,01	0,91	9,84	8,30
Cenário4	68,12	44,93	46,38	4,53	7,97	7,77	15,03	5,64	5,97

Abaixo são apresentadas as Figuras 6, 7, 8 e 9, que correspondem aos gráficos usados para complementar a interpretação dos resultados da estratégia de rastreamento de índice aprimorado. Também estão as Tabelas 6, 7, 8 e 9, contendo os valores dos

pesos (w) e Contribuições de Risco (RC), usadas para a interpretação dos resultados da esparsidade e da estratégia de paridade de risco, para estes cenários e respectivos casos:

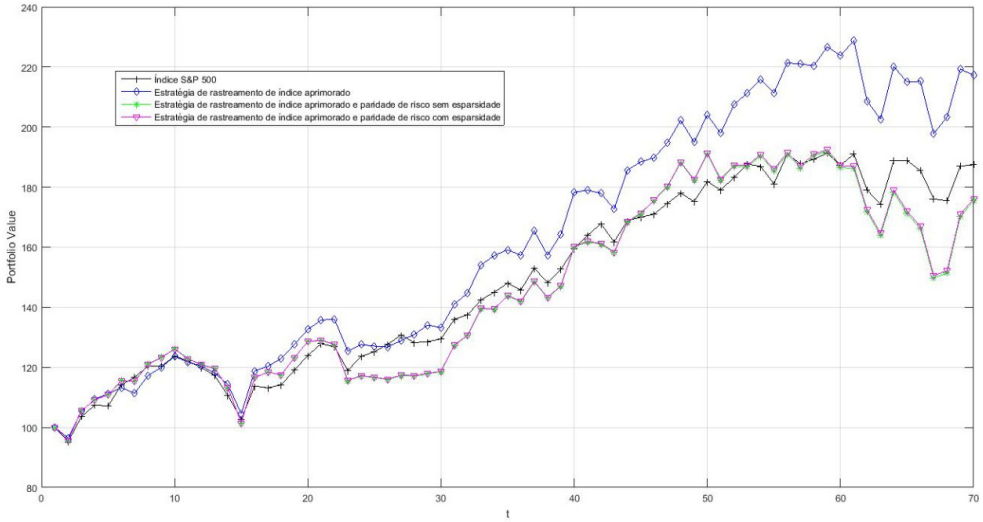

Figura 6. Gráfico do Cenário 1.

Analisando este cenário 1 através dos dados da Tabela 5, notamos que o caso 1, apesar de ter o valor de PER maior que os outros dois casos, com o valor de RMS também maior, obteve o desempenho menor, pois $IR - Caso1 < IR - Caso2 < IR - Caso3$. Neste cenário temos o caso 3 com o melhor desempenho, com $IR = 6{,}31$.

Tabela 6. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 1.

Cenário 1					
Quantidade de ativos = 10 e $\phi = \frac{1}{15}$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0345	0,0016	0,0720	0,0046	0,0718	0,0046
0,0636	0,0034	0,0750	0,0047	0,0745	0,0046
0,0000	0,0000	0,0621	0,0046	0,0612	0,0045
0,0000	0,0000	0,0707	0,0046	0,0698	0,0045
0,1783	0,0061	0,1584	0,0048	0,1598	0,0048
0,0151	0,0008	0,0528	0,0045	0,0520	0,0044
0,0963	0,0064	0,0679	0,0047	0,0672	0,0046
0,1132	0,0044	0,1318	0,0048	0,1323	0,0048
0,2691	0,0101	0,1844	0,0048	0,1856	0,0049
0,2298	0,0090	0,1250	0,0048	0,1258	0,0048

Analisando o cenário 1 através da Tabela 6, notamos que com este valor de $\phi = \frac{1}{15}$, mesmo não sendo o objetivo do caso 1, este portfólio apresentou esparsidade, como podemos notar pelos valores de $w = 0{,}0000$ na terceira e quarta posições e também não houve paridade de risco, como podemos notar pelos valores de RC distintos. O caso 2 alcançou o objetivo proposto, pois podemos notar que não há esparsidade (não existe nenhum valor $w = 0{,}0000$) e percebemos pelos valores de RC que há paridade de risco, ou seja, os valores de RC são parecidos. No caso 3 não houve esparsidade porém teve paridade de risco.

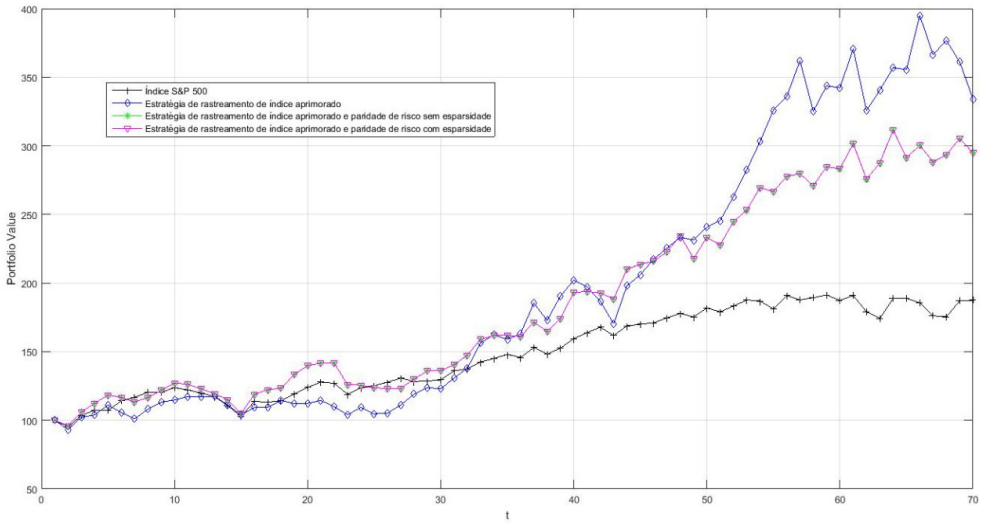

Figura 7. Gráfico do Cenário 2.

No cenário 2, notamos pelos valores apresentados na Tabela 5, que ambos os casos 2 e 3, com $\phi = 15$, obtiveram exatamente o mesmo desempenho com valores de $PER = 91{,}30$ e $RMS = 54{,}07$ e portanto o mesmo $IR = 1{,}69$ sendo superiores ao desempenho do caso 1 com $IR = 0{,}74$. Também notamos este comportamento dos casos 2 e 3 graficamente através da Figura 7.

Tabela 7. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 2.

Cenário 2					
Quantidade de ativos = 10 e $\phi = 15$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,2159	0,0131	0,2158	0,0131
0,0000	0,0000	0,3529	0,0176	0,3530	0,0176
1,0000	0,0594	0,4311	0,0185	0,4312	0,0185
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Analisando o cenário 2, com $\phi = 15$, no caso 1, todo a alocação ficou concentrada em um único ativo e consequentemente o risco está concentrado somente neste ativo. Assim como percebido na análise do desempenho, também percebemos que ambos os casos 2 e 3 apresentaram o mesmo resultado para os valores de w e RC, apresentando esparsidade e paridade de risco, dividida entre os três ativos selecionados.

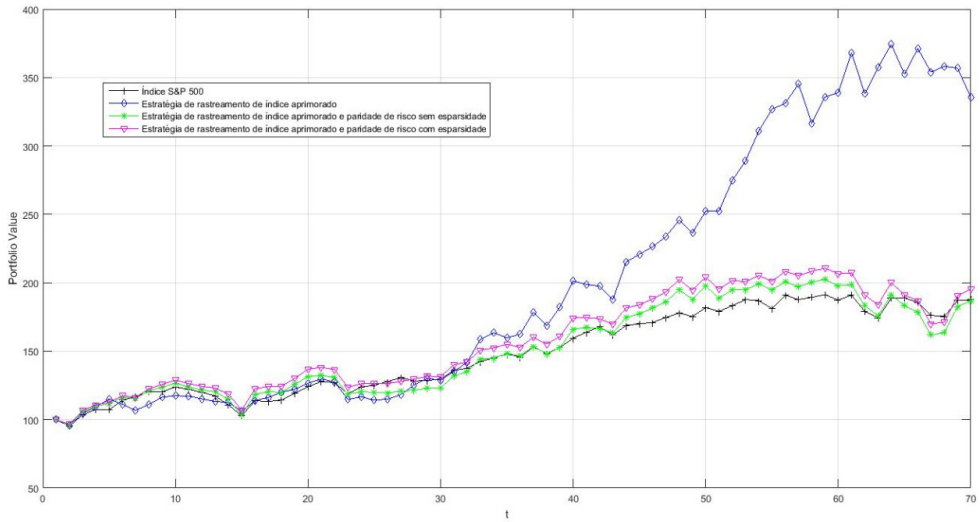

Figura 8. Gráfico do Cenário 3.

No cenário 3, percebemos que com o valor de $\phi = 1$, o caso 3 obteve um valor de $PER = 91{,}30$, superior aos demais casos, porém obteve desempenho menor que o caso 2. O caso 2 obteve o melhor desempenho com $IR = 9{,}84$, superior aos outros casos. Graficamente percebemos a que a linha deste caso 2, realmente ficou mais próxima da linha do índice de mercado, se comparando com os outros casos.

Tabela 8. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 3.

Cenário 3					
Quantidade de ativos = 10 e $\phi = 1$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0593	0,0036	0,0619	0,0038
0,0000	0,0000	0,0734	0,0045	0,0779	0,0047
0,0000	0,0000	0,0629	0,0046	0,0662	0,0048
0,0000	0,0000	0,0481	0,0030	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1558	0,0048	0,1648	0,0051
0,0000	0,0000	0,0465	0,0038	0,0482	0,0039
0,0000	0,0000	0,0731	0,0050	0,0780	0,0053
0,3100	0,0133	0,1465	0,0056	0,1518	0,0059
0,6900	0,0374	0,2043	0,0058	0,2126	0,0062
0,0000	0,0000	0,1301	0,0050	0,1387	0,0053

Neste cenário 3, com $\phi = 1$, como podemos perceber pelos valores de w, o objetivo da esparsidade é alcançado nos casos 2 e 3, pois no caso 2 não há esparsidade e

no caso 3 há esparsidade ($w = 0{,}0000$ na quarta posição), porém em nenhuma situação a paridade de risco ocorreu, como podemos verificar pelos valores diferentes de RC.

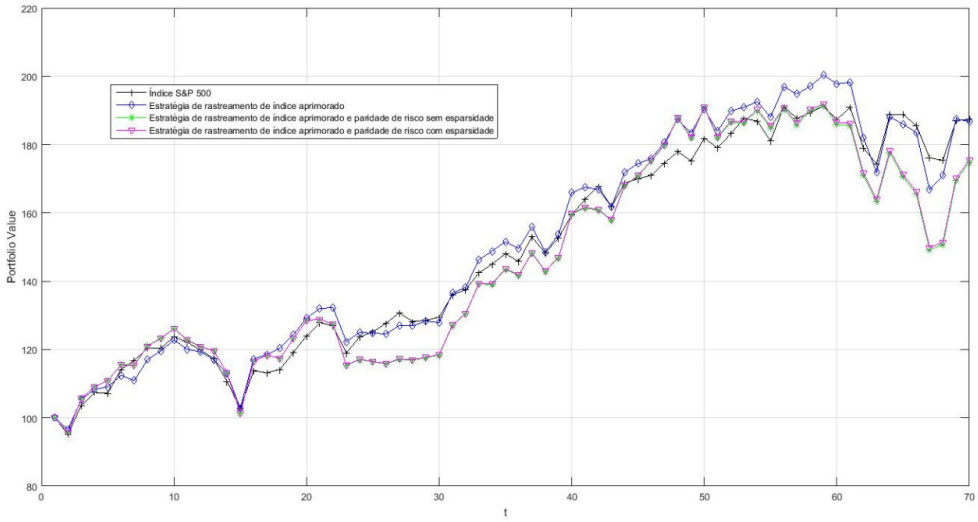

Figura 9. Gráfico do Cenário 4.

No cenário 4, com $\phi = 0$, percebemos que o caso 1 obteve um desempenho consideravelmente superior aos demais casos, com $PER = 68{,}12$ e $IR = 15{,}03$. Graficamente, Figura 9, também percebemos esta proximidade maior da linha do caso 1 com a linha do índice de mercado.

Tabela 9. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 4.

Cenário 4					
Quantidade de ativos = 10 e $\phi = 0$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0884	0,0050	0,0727	0,0047	0,0725	0,0046
0,0931	0,0055	0,0752	0,0047	0,0748	0,0047
0,0000	0,0000	0,0621	0,0046	0,0612	0,0045
0,0118	0,0007	0,0717	0,0046	0,0709	0,0046
0,2451	0,0089	0,1589	0,0048	0,1603	0,0049
0,0126	0,0008	0,0531	0,0046	0,0524	0,0045
0,0487	0,0032	0,0677	0,0047	0,0669	0,0046
0,0637	0,0021	0,1308	0,0047	0,1312	0,0047
0,1963	0,0061	0,1829	0,0048	0,1841	0,0048
0,2402	0,0096	0,1249	0,0048	0,1257	0,0048

Neste cenário 4, percebemos que o caso 1 obteve o desempenho melhor que os demais casos, conforme observado na Figura 9, e neste caso não houve paridade de risco como podemos perceber pelos valores de RC para o caso 1 na Tabela 9. Neste cenário 4, o caso 2 também atendeu as expectativas com relação aos objetivos de esparsidade e paridade de risco, pois não há esparsidade para o caso 2 e percebemos valores iguais para RC, ou seja, há paridade de risco. No caso 3, somente ocorreu a paridade de risco.

A seguir vemos os resultados dos cenários 5, 6, 7 e 8, que são os cenários comparativos dos casos 1, 2 e 3, com 20 ativos da BM&FBOVESPA, com valor de ϕ (parâmetro de aversão ao risco) configurado como $\frac{1}{15}, 15, 1\ e\ 0$ respectivamente.

Abaixo temos um quadro resumo, representado na Tabela 10, contendo os valores dos indicadores utilizados para a interpretação dos resultados da estratégia de rastreamento de índice aprimorado, para estes cenários e respectivos casos:

Tabela 10. Indicadores dos cenários 5 ao 8.

Nome Cenário	PER - Caso1	PER - Caso2	PER - Caso3	RMS - Caso1	RMS - Caso2	RMS - Caso3	IR - Caso1	IR - Caso2	IR - Caso3
Cenário5	98,44	95,31	95,31	49,67	27,12	36,04	1,98	3,51	2,64
Cenário6	92,19	96,88	96,88	170,35	175,27	175,25	0,54	0,55	0,55
Cenário7	95,31	95,31	95,31	177,05	96,22	104,60	0,54	0,99	0,91
Cenário8	54,69	95,31	95,31	0,50	23,73	27,60	109,64	4,02	3,45

Abaixo são apresentadas as Figuras 10, 11, 12 e 13, que correspondem aos gráficos usados para complementar a interpretação dos resultados da estratégia de rastreamento de índice aprimorado e as Tabelas 11, 12, 13 e 14, contendo os valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) usados para a interpretação dos resultados da esparsidade e da estratégia de paridade de risco, para estes cenários e respectivos casos:

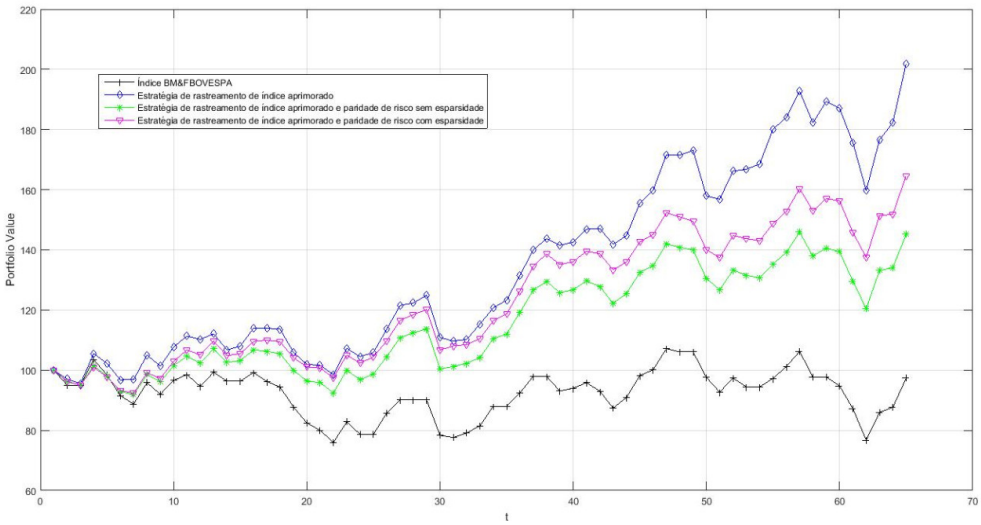

Figura 10. Gráfico do Cenário 5.

Neste cenário 5, os valores de PER, de todos os três casos, são muito próximos uns dos outros como visto na Tabela 10, porém o caso 2 obteve desempenho superior aos demais com $IR = 3{,}51$. Graficamente, como mostra a Figura 10, claramente vemos que a linha do caso 2 é a que mais se aproxima da linha do índice de mercado, apesar de ainda estar distante.

Tabela 11. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 5.

Cenário 5					
Quantidade de ativos = 20 e $\phi = \frac{1}{15}$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0447	0,0021	0,0492	0,0023
0,0000	0,0000	0,0371	0,0020	0,0406	0,0021
0,0000	0,0000	0,0423	0,0021	0,0456	0,0023
0,0000	0,0000	0,0237	0,0023	0,0000	0,0000
0,1210	0,0117	0,0256	0,0024	0,0261	0,0023
0,0000	0,0000	0,0430	0,0022	0,0450	0,0023
0,0000	0,0000	0,0347	0,0020	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0377	0,0022	0,0392	0,0023
0,0605	0,0034	0,0374	0,0022	0,0375	0,0022
0,0000	0,0000	0,0308	0,0022	0,0304	0,0021
0,0099	0,0007	0,0291	0,0022	0,0279	0,0021
0,1908	0,0072	0,0754	0,0024	0,0818	0,0027
0,0000	0,0000	0,1049	0,0020	0,1147	0,0024
0,1191	0,0036	0,0759	0,0023	0,0835	0,0026
0,1152	0,0072	0,0399	0,0023	0,0432	0,0025
0,0593	0,0027	0,0446	0,0022	0,0450	0,0022
0,1075	0,0012	0,1375	0,0021	0,1508	0,0026
0,0817	0,0039	0,0453	0,0022	0,0453	0,0023
0,0619	0,0032	0,0418	0,0022	0,0425	0,0023
0,0732	0,0040	0,0483	0,0023	0,0518	0,0025

Neste cenário 5, com $\phi = \frac{1}{15}$, podemos perceber que ambos os casos 2 e 3 atingem seus respectivos objetivos, pois no caso 2 não há esparsidade porém no caso 3 há esparsidade e em ambos os casos a paridade de risco ocorreu, como podemos verificar pelos valores de w e RC, respectivamente.

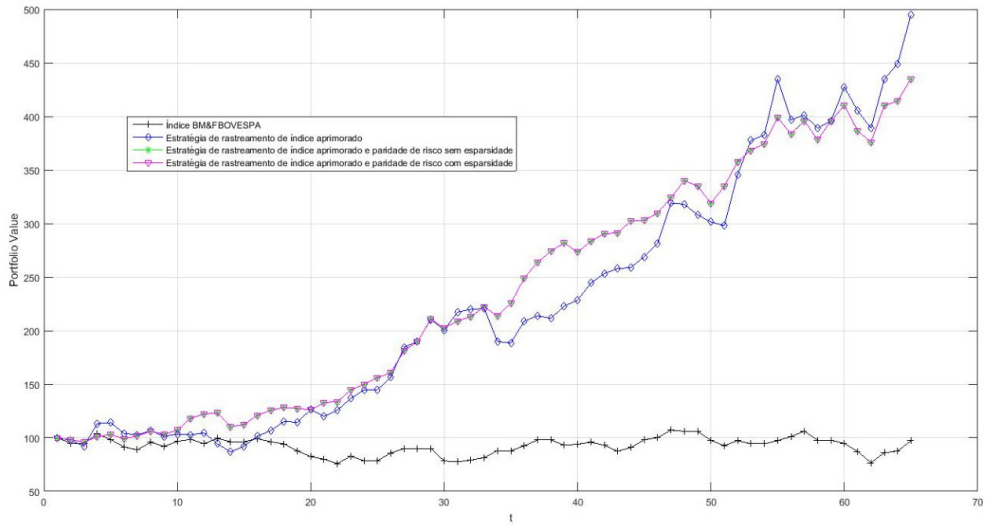

Figura 11. Gráfico do Cenário 6.

No cenário 6, podemos perceber pelos valores da Tabela 10, que em todos os três casos os desempenhos dos portfólios foram ruins, com valores de $IR = 0{,}54$, $IR = 0{,}55$ e $IR = 0{,}55$ respectivamente para os casos 1, 2 e 3. Graficamente através da Figura 11, também notamos que nenhum dos três casos conseguiram acompanhar o índice de mercado com $\phi = 15$.

Tabela 12. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 6.

Cenário 6					
Quantidade de ativos = 20 e $\phi = 15$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0000	0,0695	0,3814	0,0176	0,3815	0,0176
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,4419	0,0147	0,4420	0,0147
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1768	0,0113	0,1765	0,0113

De um modo geral os resultados obtidos neste cenário 6 com $\phi = 15$ não foram satisfatórios com relação à esparsidade. Como podemos notar na Tabela 12, no caso 1 a alocação ocorreu somente em um único ativo e em ambos casos 2 e 3, houve muita esparsidade, com a alocação sendo feita em somente três ativos. A paridade de risco não foi plenamente observada nos casos 2 e 3, pois os valores de RC não estão muito próximos uns dos outros.

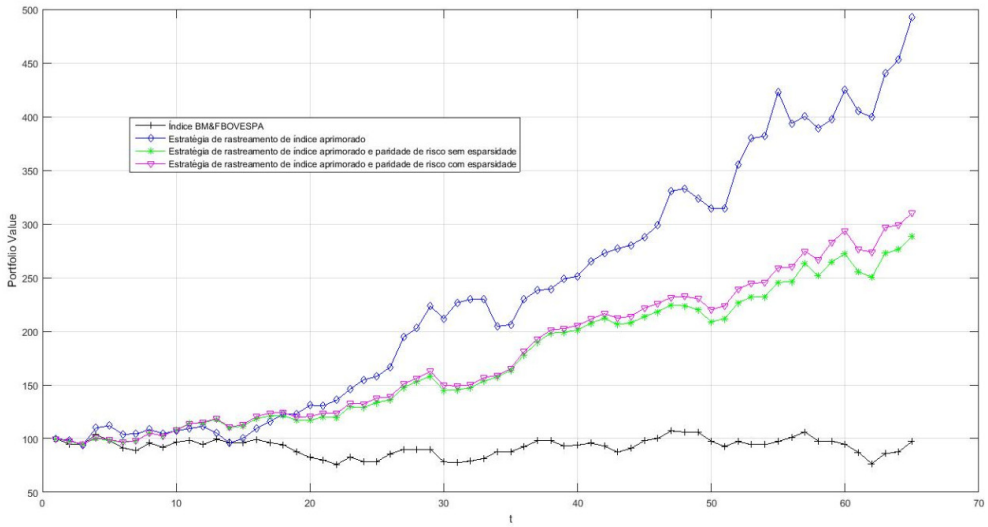

Figura 12. Gráfico do Cenário 7.

No cenário 7, com $\phi = 1$, percebemos através da Tabela 10, que nos três casos, o valor de PER foi o mesmo, porém o caso 2 obteve um desempenho um pouco melhor aos demais casos com $IR = 0{,}99$. Graficamente, através da Figura 12, percebemos que os três casos não acompanharam bem o índice de mercado.

Tabela 13. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 7.

Cenário 7					
Quantidade de ativos = 20 e $\phi = 1$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,8033	0,0548	0,1573	0,0061	0,1693	0,0068
0,0000	0,0000	0,1287	0,0033	0,1494	0,0039
0,0000	0,0000	0,1455	0,0052	0,1632	0,0059
0,0000	0,0000	0,0806	0,0036	0,0897	0,0043
0,0000	0,0000	0,0603	0,0031	0,0000	0,0000
0,1967	0,0016	0,2080	0,0056	0,2319	0,0063
0,0000	0,0000	0,0748	0,0039	0,0909	0,0044
0,0000	0,0000	0,0545	0,0027	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0904	0,0050	0,1057	0,0056

Similar ao cenário 6, neste cenário 7, através da análise dos valores apresentados na Tabela 13, os resultados obtidos com $\phi = 15$ não foram satisfatórios. No caso 1 a alocação dos pesos (w) ficou muito dispersa. No caso 2 houve esparsidade e não ocorreu a paridade de risco e no caso 3, apesar de ter ocorrido a esparsidade, não ocorreu a paridade de risco, com valores diferentes para RC.

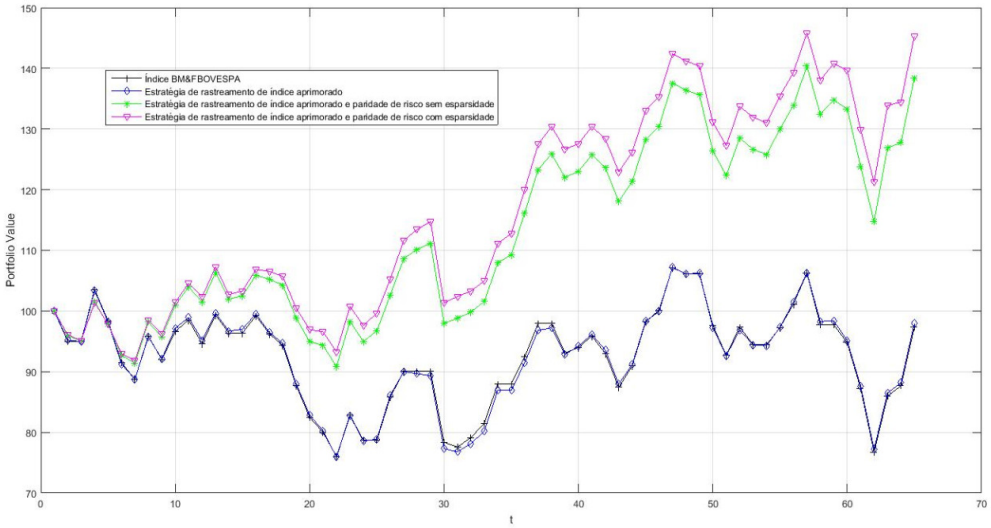

Figura 13. Gráfico do Cenário 8.

Neste cenário 8, assim como no cenário 4, com $\phi = 0$, o caso 1 foi o que obteve o melhor desempenho, neste caso, como visto na Tabela 10, $IR = 109{,}64$ para o caso 1 enquanto $IR = 4{,}02$ para o caso 2 e $IR = 3{,}45$ para o caso 3. Através da Figura 13, percebemos que o caso 1 está "colado" no índice de mercado, o que é esperado quando se usa o parâmetro de aversão ao risco $\phi = 0$.

Tabela 14. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 8.

Cenário 8					
Quantidade de ativos = 20 e $\phi = 0$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0487	0,0025	0,0471	0,0023	0,0482	0,0023
0,0497	0,0029	0,0406	0,0023	0,0391	0,0022
0,0511	0,0028	0,0442	0,0023	0,0444	0,0023
0,0500	0,0054	0,0253	0,0025	0,0218	0,0021
0,0501	0,0052	0,0261	0,0024	0,0230	0,0021
0,0498	0,0025	0,0441	0,0022	0,0429	0,0022
0,0503	0,0031	0,0386	0,0023	0,0366	0,0021
0,0483	0,0030	0,0384	0,0023	0,0368	0,0022
0,0500	0,0030	0,0379	0,0023	0,0348	0,0021
0,0499	0,0039	0,0326	0,0024	0,0307	0,0022
0,0500	0,0042	0,0306	0,0024	0,0285	0,0022
0,0500	0,0014	0,0686	0,0021	0,0723	0,0023
0,0501	0,0006	0,1065	0,0020	0,1159	0,0023
0,0499	0,0013	0,0718	0,0021	0,0765	0,0023
0,0517	0,0032	0,0394	0,0023	0,0385	0,0022
0,0501	0,0023	0,0449	0,0022	0,0415	0,0020
0,0500	0,0003	0,1297	0,0019	0,1414	0,0023
0,0501	0,0023	0,0450	0,0022	0,0416	0,0021
0,0500	0,0026	0,0421	0,0023	0,0390	0,0021
0,0500	0,0024	0,0465	0,0022	0,0465	0,0022

Como visto na Tabela 14, para o cenário 8, o caso 2 atinge o seu objetivo, pois não é percebido a esparsidade e ocorreu a paridade de risco, com valores de RC muito próximo uns dos outros.

A seguir vemos os resultados dos cenários 9, 10, 11 e 12, que são os cenários comparativos dos casos 1, 2 e 3, com 40 ativos da BM&FBOVESPA, com valor de ϕ (parâmetro de aversão ao risco) configurado como $\frac{1}{15}, 15, 1\ e\ 0$ respectivamente.

Abaixo temos um quadro resumo, representado na Tabela 15, contendo os valores dos indicadores utilizados para a interpretação dos resultados da estratégia de rastreamento de índice aprimorado, para estes cenários e respectivos casos:

Tabela 15. Indicadores dos cenários 9 ao 12.

Nome Cenário	PER - Caso1	PER - Caso2	PER - Caso3	RMS - Caso1	RMS - Caso2	RMS - Caso3	IR - Caso1	IR - Caso2	IR - Caso3
Cenário9	96,88	95,31	95,31	68,19	35,26	64,99	1,42	2,70	1,47
Cenário10	85,94	96,88	96,88	166,09	124,23	128,40	0,52	0,78	0,75
Cenário11	85,94	96,88	96,88	166,33	99,48	99,37	0,52	0,97	0,97
Cenário12	32,81	90,63	95,31	0,07	9,17	29,66	500,19	9,88	3,21

Abaixo são apresentadas as Figuras 14, 15, 16 e 17, que correspondem aos gráficos usados para complementar a interpretação dos resultados da estratégia de rastreamento de índice aprimorado e as Tabelas 16, 17, 18 e 19, contendo os valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) usados para a interpretação dos resultados da esparsidade e da estratégia de paridade de risco, para estes cenários e respectivos casos:

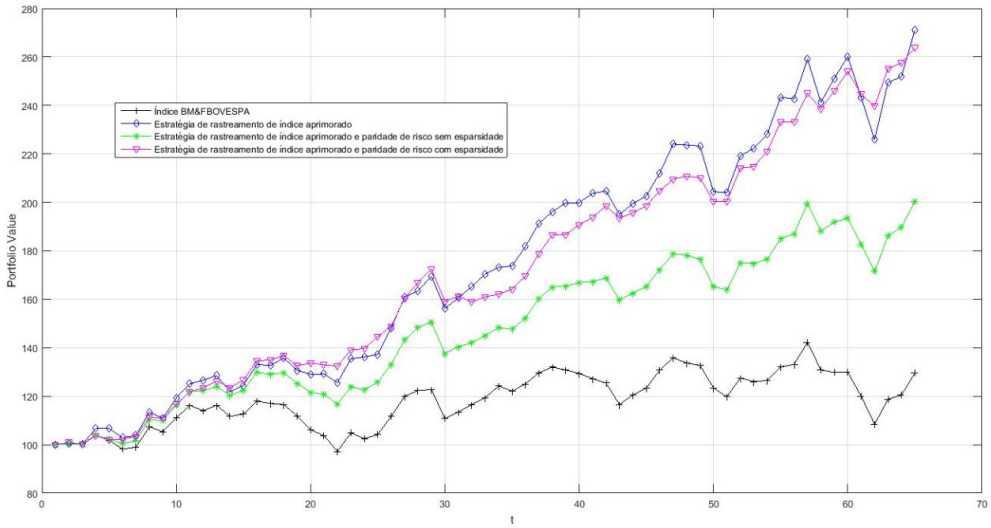

Figura 14. Gráfico do Cenário 9.

No cenário 9, com $\phi = \frac{1}{15}$, o valor de PER para o caso 1 é um pouco melhor que o valor de PER para os casos 2 e 3, que são iguais, porém o caso 2 obteve melhor desempenho com $IR = 2{,}70$, como é observado na Tabela 15. Através da Figura 14, também percebemos que a linha do gráfico do caso 2 é a que mais se aproxima da linha do índice de mercado, o que justifica o valor de IR superior aos demais.

Tabela 16. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 9.

Cenário 9					
Quantidade de ativos = 40 e $\phi = \frac{1}{15}$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0204	0,0008	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0314	0,0011	0,0000	0,0000
0,1029	0,0080	0,0175	0,0014	0,0000	0,0000
0,0013	0,0000	0,0469	0,0008	0,0960	0,0023
0,1533	0,0065	0,0430	0,0015	0,0707	0,0027
0,0000	0,0000	0,0326	0,0012	0,0000	0,0000
0,0524	0,0004	0,0800	0,0010	0,1149	0,0023
0,0350	0,0025	0,0174	0,0013	0,0000	0,0000
0,0898	0,0022	0,0510	0,0012	0,0826	0,0025
0,0087	0,0003	0,0298	0,0012	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0148	0,0011	0,0000	0,0000
0,0164	0,0006	0,0269	0,0011	0,0564	0,0024
0,0000	0,0000	0,0260	0,0011	0,0000	0,0000
0,0052	0,0002	0,0245	0,0012	0,0000	0,0000
0,0724	0,0038	0,0282	0,0014	0,0677	0,0028
0,0000	0,0000	0,0242	0,0011	0,0000	0,0000
0,0912	0,0032	0,0389	0,0013	0,0655	0,0024
0,0138	0,0007	0,0219	0,0012	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0127	0,0010	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0469	0,0010	0,0715	0,0019
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0793	0,0044	0,0269	0,0014	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0320	0,0009	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0236	0,0010	0,0000	0,0000
0,0665	0,0039	0,0281	0,0014	0,0563	0,0026
0,0080	0,0005	0,0214	0,0013	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0394	0,0021	0,0252	0,0013	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0209	0,0010	0,0000	0,0000
0,0661	0,0013	0,0559	0,0012	0,0961	0,0025
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0301	0,0010	0,0816	0,0024
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0111	0,0004	0,0292	0,0011	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0200	0,0011	0,0000	0,0000
0,0870	0,0019	0,0516	0,0012	0,1408	0,0028
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Com o valor de $\phi = \frac{1}{15}$, no cenário 9, a esparsidade apareceu em todos os casos, e a paridade de risco é observada nos casos 2 e 3, porém os valores de RC não estão muito próximos uns dos outros, como visto na Tabela 16.

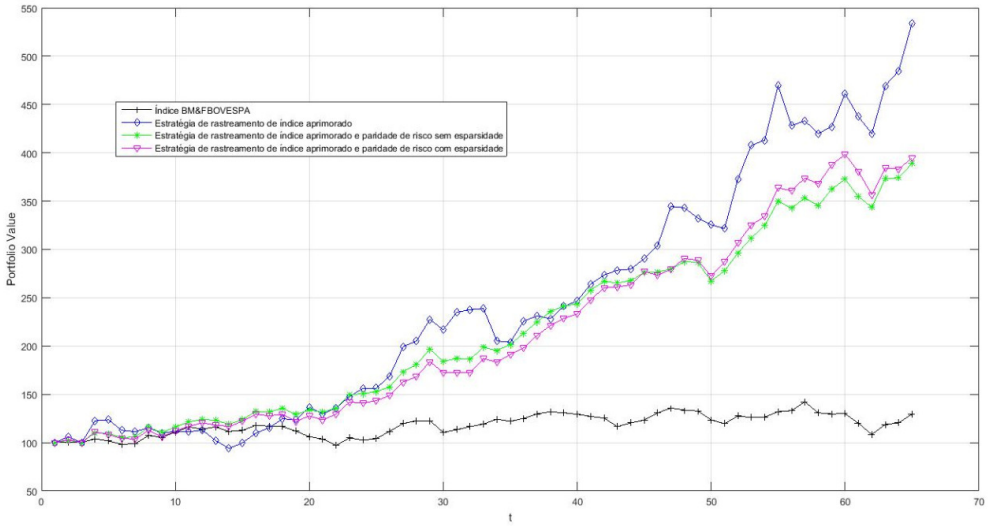

Figura 15. Gráfico do Cenário 10.

No cenário 10, nos três casos, os valores de PER são altos, com valores iguais para os casos 2 e 3, com $PER = 96{,}88$, porém o caso 2 tem um desempenho um pouco melhor que o caso 3 com $IR = 0{,}78$, sendo que para o caso 3, o valor de $IR = 0{,}75$, como registrado na Tabela 15. Na Figura 15 também conseguimos visualizar essa pequena diferença entre os casos 2 e 3, com pouca superioridade do caso 2 sobre o caso 3.

Tabela 17. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 10.

Cenário 10					
Quantidade de ativos = 40 e $\phi = 15$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1,0000	0,0694	0,3072	0,0155	0,3436	0,0164
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1731	0,0048	0,2252	0,0077
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,2326	0,0075	0,2693	0,0090
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1458	0,0044	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1412	0,0086	0,1619	0,0105
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

De acordo com a Tabela 17, no cenário 10 com $\phi = 15$, os resultados não foram satisfatórios, no caso 1, todo a alocação foi feita em um único ativo, no caso 2 houve muita esparsidade e sem paridade de risco e no caso 3 não ocorreu a paridade de risco apesar de ter havido a esparsidade.

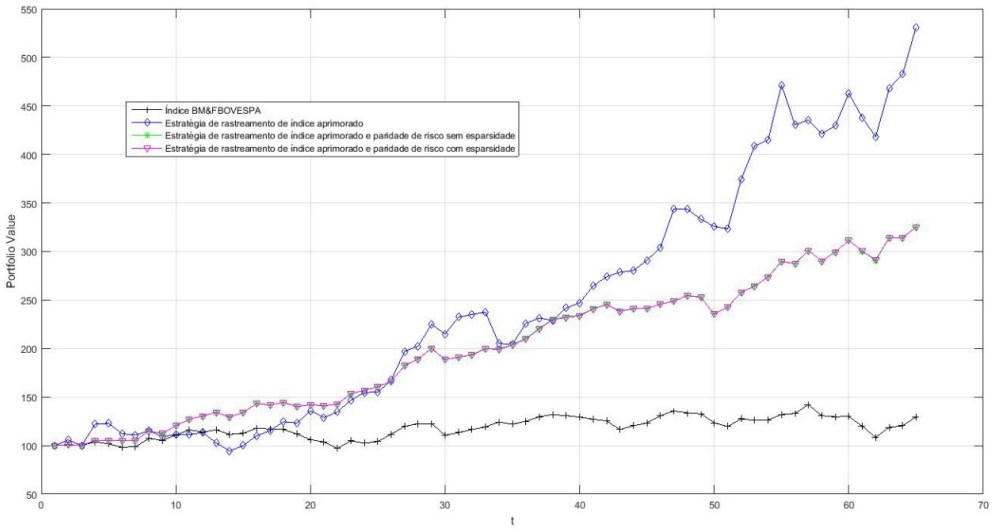

Figura 16. Gráfico do Cenário 11.

No cenário 11, com $\phi = 1$, os casos 2 e 3 obtiveram exatamente o mesmo desempenho com $IR = 0{,}97$, de acordo com a Tabela 15, porém como notamos graficamente através da Figura 16, as linhas destes casos 2 e 3 estão distantes do índice de mercado.

Tabela 18. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 11.

Cenário 11					
Quantidade de ativos = 40 e $\phi = 1$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,9802	0,0680	0,1306	0,0055	0,1317	0,0055
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1526	0,0036	0,1530	0,0036
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1435	0,0040	0,1443	0,0041
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0797	0,0033	0,0764	0,0031
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1088	0,0041	0,1089	0,0041
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0646	0,0033	0,0585	0,0030
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0198	0,0004	0,0706	0,0043	0,0694	0,0042
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1308	0,0036	0,1319	0,0037
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0000	0,0000	0,1189	0,0024	0,1259	0,0026
0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Similar ao cenário 10, este cenário 11 com $\phi = 1$, como vemos na Tabela 18, também não alcançou resultados satisfatórios. No caso 1, a alocação foi feita somente entre dois ativos, conforme mostram os valores de w. Casos 2 e 3, ambos com esparsidade e sem paridade de risco.

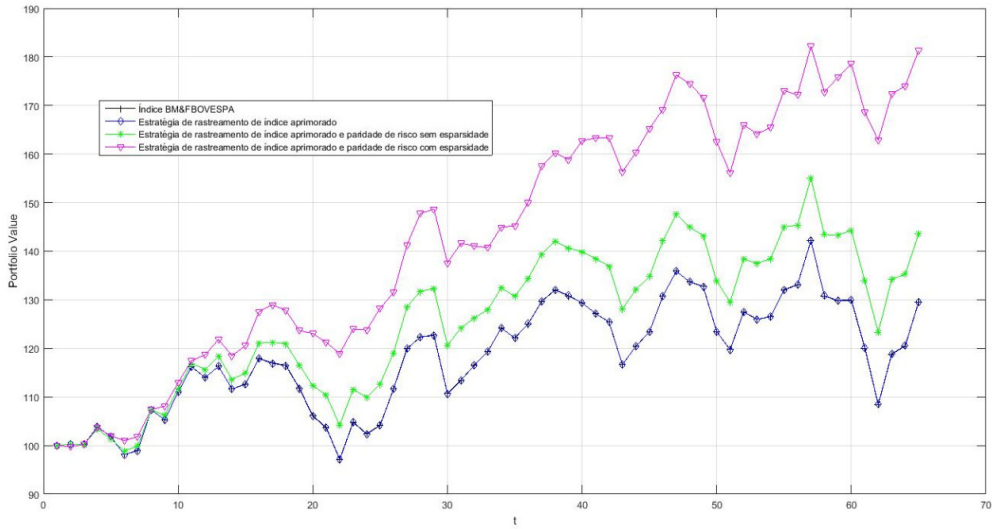

Figura 17. Gráfico do Cenário 12.

No cenário 12, também como percebido em outros cenários com $\phi = 0$, o caso 1 foi muito superior aos demais. O caso 1 obteve desempenho muito melhor com $IR = 500{,}19$, como mostra a Tabela 15. Como visto na Figura 17, a linha do caso 1 está sobreposta à linha do índice de mercado, como é esperado nesta situação com este valor do parâmetro de aversão ao risco ϕ.

Tabela 19. Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) do Cenário 12.

Cenário 12					
Quantidade de ativos = 40 e $\phi = 0$					
Caso1: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$		Caso2: $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 100000$		Caso3: $\lambda_1 = 0{,}001$; $\lambda_2 = 100000$	
w	RC	w	RC	w	RC
0,0267	0,0012	0,0266	0,0011	0,0645	0,0024
0,0183	0,0009	0,0235	0,0011	0,0524	0,0022
0,0263	0,0009	0,0287	0,0010	0,0531	0,0019
0,0253	0,0020	0,0149	0,0012	0,0000	0,0000
0,0240	0,0003	0,0447	0,0008	0,0728	0,0019
0,0249	0,0008	0,0292	0,0010	0,0559	0,0019
0,0256	0,0009	0,0267	0,0010	0,0000	0,0000
0,0251	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,0248	0,0021	0,0158	0,0012	0,0000	0,0000
0,0247	0,0005	0,0415	0,0009	0,0676	0,0019
0,0250	0,0010	0,0263	0,0010	0,0478	0,0019
0,0257	0,0022	0,0153	0,0012	0,0000	0,0000
0,0242	0,0010	0,0291	0,0011	0,0527	0,0021
0,0244	0,0010	0,0244	0,0010	0,0000	0,0000
0,0230	0,0011	0,0218	0,0011	0,0000	0,0000
0,0244	0,0012	0,0216	0,0011	0,0000	0,0000
0,0255	0,0012	0,0230	0,0011	0,0000	0,0000
0,0252	0,0008	0,0287	0,0009	0,0000	0,0000
0,0252	0,0014	0,0197	0,0011	0,0000	0,0000
0,0253	0,0023	0,0149	0,0012	0,0000	0,0000
0,0257	0,0004	0,0406	0,0008	0,0758	0,0020
0,0250	0,0012	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000
0,0242	0,0013	0,0197	0,0011	0,0000	0,0000
0,0249	0,0014	0,0208	0,0011	0,0000	0,0000
0,0262	0,0007	0,0304	0,0009	0,0544	0,0018
0,0244	0,0010	0,0242	0,0010	0,0000	0,0000
0,0246	0,0013	0,0226	0,0011	0,0000	0,0000
0,0253	0,0018	0,0176	0,0012	0,0000	0,0000
0,0315	0,0017	0,0216	0,0011	0,0000	0,0000
0,0247	0,0014	0,0199	0,0011	0,0000	0,0000
0,0246	0,0012	0,0229	0,0011	0,0522	0,0022
0,0256	0,0004	0,0412	0,0009	0,0805	0,0021
0,0250	0,0013	0,0215	0,0011	0,0000	0,0000
0,0238	0,0007	0,0286	0,0010	0,0463	0,0016
0,0247	0,0015	0,0183	0,0011	0,0000	0,0000
0,0232	0,0011	0,0232	0,0011	0,0000	0,0000
0,0261	0,0010	0,0287	0,0010	0,0411	0,0016
0,0253	0,0014	0,0202	0,0011	0,0000	0,0000
0,0263	0,0006	0,0417	0,0010	0,1082	0,0025
0,0253	0,0005	0,0389	0,0009	0,0748	0,0020

No cenário 12, com $\phi = 0$, como percebido na Tabela 19, no caso 2 apenas um ativo não é utilizado, $w = 0{,}0000$, porém ocorre a paridade de risco. Já no caso 3, a esparsidade ocorre assim como a paridade de risco.

Podemos notar que de maneira consistente, as estratégias de investimento apresentadas atingem os seus respectivos objetivos, independentemente da quantidade de ativos, porém podem atingir distintos resultados, dependendo dos valores assumidos pelas variáveis de *trade-off* de cada estratégia. Para comprovação, podemos comparar o resultado de cada caso isoladamente nos grupos de cenários 1 ao 4, 5 ao 8 e 9 ao 12, que utilizam portfólios diferentes, respectivamente com 10 ativos da S&P 500 (cenários 1 ao 4) , 20 ativos da BM&FBOVESPA (cenários 5 ao 8) e 40 ativos da BM&FBOVESPA (cenários 9 ao 12), assim podemos analisar os resultados apresentados nas Figuras 6 à 17 e Tabelas 5, 10 e 15 para análise da estratégia de rastreamento de índice aprimorado e os resultados apresentados nas Tabelas 6, 7, 8 e 9 (cenários 1 ao 4), Tabelas 11, 12, 13 e 14 (cenários 5 ao 8) e Tabelas 16, 17, 18 e 19 (cenários 9 ao 12) para análise da estratégia paridade de risco e também da esparsidade.

Primeiramente analisando o caso 1 (Estratégia de rastreamento de índice aprimorado), percebemos que nos cenários 4, 8 e 12, esta estratégia replicou o índice do mercado. Percebemos isso através dos gráficos nas Figuras 9, 13 e 17 respectivamente, onde vemos que a linha desta estratégia de rastreamento de índice aprimorado está sobreposta à linha do índice de mercado. Isso ocorreu pelo fato destes cenários estarem utilizando o valor de $\phi = 0$, o que fez com que o resultado desta estratégia fosse um *tracking portfólio* "colado" no *benchmark portfólio*, o que também explica que nestes cenários, os valores de IR para este caso 1 foram superiores aos valores de IR dos outros dois casos.

Isso significa que esta estratégia obteve desempenho melhor que as outras duas estratégicas (caso 2 e 3) para estes cenários com $\phi = 0$. Ainda com relação ao caso 1, comparando o restante dos cenários entre eles, podemos perceber que o parâmetro de aversão ao risco ϕ interfere diretamente na *performance* desta estratégia, isso é comprovado pelos valores da medida de desempenho (IR) dos cenários 1, 5 e 9 que são superiores aos cenários 2 e 3 (comparado ao cenário 1); 6 e 7 (comparado ao cenário 5); 10 e 11 (comparado ao cenário 9) respectivamente. Esta estratégia obteve resultados

melhores com o parâmetro de aversão ao risco $\phi = \frac{1}{15}$. Variando o valor de ϕ, é possível valorizar o retorno excessivo.

Analisando o caso 2 (Estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco sem esparsidade), podemos perceber que obtivemos resultados compatíveis, comparados com o caso 1, com a inserção da estratégia de paridade de risco, sendo $\lambda_2 > 0$, um parâmetro regulador (*trade-off*) para habilitar a paridade de risco. Analisando os valores de RC para o caso 2 nas tabelas de Valores dos pesos (w) e Contribuições de Risco (RC) apresentadas acima, percebemos que de uma maneira geral, o objetivo da paridade de risco foi alcançado para os cenários 1, 4, 5, 8, 9 e 12, quando temos o parâmetro $\phi = \frac{1}{15}$ (para os cenários 1, 5 e 9) e $\phi = 0$ (para os cenários 4, 8 e 12). Em parte destes mesmos cenários (cenários 5, 8, 9 e 12) o objetivo da estratégia de rastreamento de índice aprimorado também foi alcançado em conjunto. Quando temos valores de $\phi = 15$ e $\phi = 1$, percebemos uma variação nos valores de contribuição de risco para os ativos que compõem os respectivos portfólios, não caracterizando de fato a paridade de risco, e nestes casos a estratégia de rastreamento de índice aprimorado também não ocorreu plenamente.

Foi percebido que o parâmetro de aversão ao risco ϕ interfere diretamente na *performance* destas estratégias em conjunto, rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco sem esparsidade. Também foi percebido que o parâmetro de *trade-off* λ_2, regulador da estratégia paridade de risco é bastante sensível e impacta diretamente no objetivo desta estratégia, como pudemos notar em teste efetuado tomando como referência o cenário 1 do caso 3 como é observado na Tabela 6. Neste cenário podemos ver que com o valor de $\lambda_2 = 100000$, há paridade de risco, porém, quando o valor de λ_2 é alterado para 1000, o novo valor do vetor RC fica igual à $[0{,}0052 \quad 0{,}0053 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0067 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0053 \quad 0{,}0062 \quad 0{,}0070 \quad 0{,}0066]$ ou então $\lambda_2 = 0$, o novo valor do vetor RC fica igual à $[0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0087 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0068 \quad 0{,}0054 \quad 0{,}0111 \quad 0{,}0092]$, em ambos os casos não caracterizando a paridade de risco.

Analisando o caso 3 (Estratégia de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade), percebemos que no cenário 5, o *tracking portfólio* construído

obteve um desempenho similar ao melhor desempenho deste cenário, com valor de $IR = 2{,}64$. Também percebemos que ocorreu a paridade de risco e também existiu a esparsidade, como podemos ver na Tabela 10, especificamente para identificação da estratégia de rastreamento de índice aprimorado e na Tabela 11, para comprovação dos valores dos pesos (w) e contribuição de risco (RC), onde, podemos notar que em alguns pesos, o valor de w é igual à $0{,}0000$, o que caracteriza a esparsidade e através do vetor RC podemos notas que todos os seus valores são equivalentes, ou seja, há paridade de risco. No cenário 1, apesar de não ter caracterizado a esparsidade (valores de w na Tabela 6), podemos notar pela análise dos valores dos indicadores apresentados na Tabela 5, que este caso obteve desempenho melhor que os outros dois casos, pois o seu valor da medida de desempenho ($IR = 6{,}31$) foi superior aos valores de IR dos casos 1 e 2, que tiveram respectivos IR iguais à 4,86 e 5,96. Também foi percebido que o parâmetro de aversão ao risco ϕ interfere nas estratégias em conjunto, rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco, com esparsidade, como podemos comparar os valores de (w) e RC das Tabelas 11, 13 e 14 para os cenários 5, 7 e 8 respectivamente.

No cenário 5, conforme já comentado anteriormente, temos as três estratégias em conjunto com $\phi = \frac{1}{15}$, porém no cenário 7 com $\phi = 1$ deixamos de ter paridade de risco e no cenário 8 com $\phi = 0$, deixamos de ter a esparsidade. Já com relação ao parâmetro de *trade-off* λ_1, regulador da esparsidade, notou-se que também é sensível e impacta diretamente no objetivo desta estratégia, como pudemos notar em teste efetuado tomando como referência o cenário 1 do caso 3 como é observado na Tabela 6. Neste cenário podemos ver que com o valor de $\lambda_1 = 0{,}001$, não há esparsidade, porém, quando o valor de λ_1 é alterado para 1, o novo valor do vetor w fica igual à $[0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}5784 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}4216 \quad 0{,}0000]$ ou seja, apareceu esparsidade e a paridade de risco é mantida com $RC = [0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0252 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0000 \quad 0{,}0204 \quad 0{,}0000]$. Percebeu-se que a esparsidade em portfólios maiores é satisfeita com valores de λ_1 menores e que no geral, valores de λ_1 maiores geram mais esparsidade.

5. Conclusão

Este trabalho propõe um novo modelo de otimização de portfólios em que as estratégias *enhanced index tracking* e *risk parity* são usadas em conjunto. Consequentemente, obtivemos um *tracking portfolio* cujo retorno superará os índices de mercado e concomitantemente, todos os ativos possuem a mesma contribuição de risco. Este problema nunca foi abordado e explorado anteriormente, portanto se trata de um problema diferente.

Quando as estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco são utilizadas em conjunto, implicam em muitas transações, resultando no aumento dos custos, pois se espera investir em muitos ou em todos os ativos disponíveis que compõe o *benchmark portfolio*. Consequentemente, temos a diminuição do retorno geral esperado.

O método proposto por Feng e Palomar (2016) calcula um portfólio esparso onde a distribuição do capital nos ativos selecionados é tal que a contribuição do risco é o mesmo em todos. Este método foi utilizado para solucionar o problema proposto .

O problema foi resolvido e a lacuna apresentada foi preenchida com este trabalho, pois com os resultados encontrados, foi possível encontrar um *tracking portfolio* esparso através da seleção de ativos, que regulariza a sua quantidade, com rastreamento de índice aprimorado e com paridade de risco (mesma contribuição de risco para todos os ativos selecionados).

A implementação do algoritmo "*Algoritmo 1 SCA*", cedido por Feng e Palomar e apresentado no capítulo 3, foi modificada e adicionado o rastreamento de índice aprimorado. Para a validação, foram utilizados indicadores e testes detalhados no capítulo 4.

A validação foi feita do ponto de vista do investidor, do ponto de vista financeiro. Foi apresentada uma solução analítica para o problema, onde consideramos um problema uni-período, com um número limitado de ativos mantidos no *tracking portfolio*. Para a análise de desempenho foi utilizada a relação $IR = PER/RMS$. Assim observamos que um determinado portfólio X obtém desempenho melhor que outro

portfólio Y quando o valor de IR do portfólio X é superior ao valor de IR do portfólio Y. Estes resultados particulares não podem ser generalizados, pois a *performance* do portfólio Y pode ser melhorada escolhendo um parâmetro ϕ apropriado.

O parâmetro de aversão ao risco ϕ interfere diretamente na *performance* das estratégias. Variando o valor de ϕ, é possível valorizar o retorno excessivo. O parâmetro regulador da esparsidade λ_1 é sensível. Valores de λ_1 maiores geram mais esparsidade. O parâmetro de *trade-off* λ_2, regulador da paridade de risco, também é sensível e impacta diretamente no objetivo desta estratégia, como pudemos notar em testes efetuados no capítulo 4.

Também foi percebido que o parâmetro ϕ interfere no objetivo das estratégias em conjunto, e para corrigir isso, é necessário fazer ajustes e encontrar um equilíbrio entre os outros parâmetros de *trade-off*, λ_1 e λ_2, que também impactam diretamente no resultado das estratégias. As estratégias de investimento apresentadas atingem os seus respectivos objetivos, independentemente da quantidade de ativos, porém podem atingir resultados distintos dependendo dos valores assumidos pelas variáveis de *trade-off* de cada estratégia, como foi detalhado no capítulo 4.

Os objetivos das estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade foram atingidos. Podemos ver que o *tracking portfólio* construído foi esparso e conjuntamente o rastreamento de índice foi aprimorado e obtivemos a paridade de risco com o uso de valores apropriados para as variáveis de *trade-off*.

Podemos concluir que a solução proposta pode selecionar com eficiência os ativos e diversificar o risco. Os resultados mostraram que a formulação proposta atingiu conjuntamente, a seleção de ativos e a diversificação de riscos superando os índices de mercado.

Como visto nos resultados de testes, do cenário 5 principalmente, estes apresentaram resultados que satisfazem o objetivo proposto. Os resultados encontrados, conforme apresentados no capítulo 4, mostraram que é possível realizar a otimização de portfólios com estratégias de rastreamento de índice aprimorado e paridade de risco com esparsidade, basta encontrar um equilíbrio entre os parâmetros de *trade-off* reguladores ϕ, λ_1 e λ_2.

5.1. Trabalhos Futuros

Este estudo trouxe reflexões e análises para pesquisas em Ciência da Computação, particularmente em PL, PQ e Otimização de portfólios. Porém, ele pode ser ampliado em vários projetos de pesquisa futuros. Em face das limitações do método, das limitações da pesquisa realizada e do direcionamento obtido a partir dos resultados desta dissertação, deixamos uma relação de possíveis trabalhos que podem ser realizados futuramente. Destacando-se como próximos passos desta pesquisa, é possível citar os seguintes trabalhos futuros principais:

- A implementação desenvolvida pode ser testada em problemas maiores, ou seja, em portfólios contendo um número ainda maior de ativos.
- Um experimento interessante a ser realizado, seria testar a implementação em mais cenários internacionais, ou seja, com portfólios de outros países, para poder comparar o comportamento de outros diferentes mercados.
- E finalmente, algo interessante para trabalhos futuros, seria fazer o rebalanceamento do portfólio, ou seja, recalcular os *ômegas* periodicamente, todo mês por exemplo, e redefinir a carteira com os novos parâmetros atualizados (com o mesmo ϕ, pois este parâmetro *trade-off* é bastante subjetivo para deixar o portfólio mais passivo, menos passivo ou intermediário) e rodar tudo novamente para verificar o resultado final comparando com o resultado deste trabalho.

6. Referências

Andersen, M.;Dahl J.; Liu Z. and Vandenberghe L.; Interior-point methods for large-scale cone programming, MIT Press, 2011.

Appell, D. 2009. Bridgewater under the Weather: 'Depression mode' decision good news for competitors. http://www.pionline.com/article/20091130/PRINT/311309975, Acesso em 20 de abril de 2017.

Ariki, R. Y. 2015. Portfólios Ponderados Pelo Risco: Uma Abordagem para a Alocação de Carteiras. *Dissertação de Mestrado*, FGV.

Assaf, A. N. 2010. Mercado Financeiro. São Paulo. 9a Edição, Atlas.

Bai, X., Scheinberg K. e Tutuncu, R. Least-squares approach to risk parity in portfolio selection, Quantitative Finance, 16:3, 357-376, DOI: 10.1080/14697688.2015.1031815, 2016.

Bazaraa, M. S.; Jarvis, J. J. and Sherali, H. D. Linear Programming and Network Flows. John Wiley & Sons, 2010.

Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M. (2006). Nonlinear programming. Theory and algorithms. John Wiley & Sons.

Benidis, K., Feng, Y. and Palomar, D. P. Sparse Portfolios for High-Dimensional Financial Index Tracking. IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, VOL. 66, NO. 1, JANUARY 1, 2018.

Bocanegra, S. (2005). Algoritmos de Newton-Krylov precondicionados para métodos de pontos interiores. Programa de Doutorado em Ciência da Computação, Universidade Federal de Minas Gerais, 109 p.

Boyd, S.; Vandenberghe, L.; Convex Optimization. Cambridge University Press, 2009.

Candes, E. J., Wakin, M. B. and Boyd, S. P. Enhancing sparsity by reweighted l1 minimization. Journal of Fourier Analysis and Applications, vol. 14, no. 5-6, pp. 877–905, 2008.

Chang, T. J.; Meade, N.; Beasley, J. E.; Sharaiha, Y. M. Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization. Computer and Operations Research, 27, p. 1271–1302, 2000.

Dalio, R. et al. 2015. Our Thoughts about Risk Parity and All Weather. https://www.bridgewater.com/resources/our-thoughts-about-risk-parity-and-all-weather.pdf, Acesso em 21 de abril de 2017.

Daneshmand, A., Facchinei, F., Kungurtsev, V. and Scutari, G. Hybrid random/deterministic parallel algorithms for convex and nonconvex big data optimization. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 15, pp. 3914–3929, Aug. 2015.

DeMiguel, V., Garlappi, L. and Uppal, R., Optimal Versus Naive Diversification: How Inefficient is the 1/N Portfolio Strategy? (May 2009). The Review of Financial Studies, Vol. 22, Issue 5, pp. 1915-1953, 2009. Available at SSRN: https://ssrn.com/abstract=1376199 or http://dx.doi.org/hhm075.

Dias, C. H. Um novo algoritmo genético para a otimização de carteiras de investimento com restrições de cardinalidade. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Campinas, Campinas, Brasil, 2008.

Economatica. (2017). https://economatica.com, Acesso em 18 de abril de 2017.

Facchinei, F., Scutari, G. and Sagratella, S. Parallel selective algorithms for nonconvex big data optimization. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 7, pp. 1874–1889, April 2015.

Feng, Y. and Palomar, D. P. A Signal Processing Perspective on Financial Engineering. Foundations and Trends R in Signal Processing, vol. 9, no. 1-2, pp. 1–231, 2015(a).

Feng, Y. and Palomar, D. P. Portfolio optimization with asset selection and risk parity control. 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pages 6585–6589, 2016.

Feng, Y. and Palomar, D. P. SCRIP: Successive convex optimization methods for risk parity portfolios design. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 19, pp. 5285–5300, Oct. 2015(b).

Golub, Gene H. and Van Loan Charles F. (2013). MATRIX Computations. 4th Edition. John Hopkins University Press.

Gondzio, J. “Interior Point Methods 25 Years Later” Research Paper, European Journal of Operational Research, February 2011.

Grant, M. e Boyd, S. CVX: A system for disciplined convex programming, CVX user guide, online help home page. CVX Research, Inc. http://cvxr.com/cvx/, Acesso em 10 de julho de 2018.

Grünbaum, Branko. Convex Polytopes, 2nd edition, prepared by Volker Kaibel, Victor Klee, and Günter M. Ziegler, 2003, ISBN 0-387-40409-0, ISBN 978-0-387-40409-7.

Jansen, R. and Dijk, R. V. Optimal Benchmark Tracking with Small Portfolios. The Journal of Portfolio Management 2002.28.2:33-39, 2002.

Karmarkar, N. (1984). A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming. STOC '84 Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing. pp. 302-311, ISBN: 0-89791-133-4, DOI: 10.1145/800057.808695.

Luenberger, D., Linear and Nonlinear Programming, Addison-Wesley, 2007. Third Edition. Springer.

Maillard S., Roncalli T. and Teïletche J. (2010), The Properties of Equally Weighted Risk Contribution Portfolios, Journal of Portfolio Management, 36(4), pp. 60-70.

Markowitz, Harry M. (1959). Portfolio Selection. Monopraph 16. Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University.

MATLAB. (2018). http://mathworks.com/, Acesso em 10 de julho de 2018.

Mitra, G.; Kyriakis, T.; Lucas, C. A review of portfolio planning: Models and systems. Em: Advances in Portfolio Construction and Implementation. S.E. Satchell and A.E. Scowcroft (Eds.), Oxford: Butterworth & Heinmann, 2003, p. 19.

Moretti, Antonio. Aula Programação Linear. 2010. http://www.ime.unicamp.br/~moretti/ms428/aula4.pdf, Acesso em 25 de junho de 2017.

MOSEK, “The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual,” Tech. Rep., 2013. [Online]. Disponível em http://www.mosek.com, Acesso em 22 de agosto de 2018.

Nobelprize.org. The Official Web Site of the Nobel Prize. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1990/markowitz-bio.html, Acesso em 25 de julho de 2017.

Paulo, W. L. de, Oliveira, E. M. de and Costa, O. L. do V. Enhanced index tracking optimal portfolio selection. Finance Research Letters 16 (2016) 93–102.

Paulo, W. L. de, Fontova, M. I. V. and Souza, R. C. de. An analysis of a mean-variance enhanced index tracking problem with weights constraints. Investiment Management and Financial Innovations, 15(4), 183-192. doi:10.21511/imfi.15(4).2018.15, (2018).

Porter, Michael. A Hora da Estratégia. São Paulo: HSM, 2002.

Qian, E. "Risk Parity Portfolios: Efficient Portfolios through True Diversification," Research Paper, Panagora, September 2005.

Ragazzi, A. P, Valle P. Rumo ao Recorde?. São Paulo: Abril, 2016. Revista Exame, Edição 1125, Ano 50, n. 21, p. 32-41, 2016.

Roncalli, T. (2013(a)). Introduction to Risk Parity and Budgeting. *CRC Press*, 1**(**1), pp. 3-70, 1**(2**), pp. 71-148.

Roncalli T. (2013(b)), Introducing Expected Returns into Risk Parity Portfolios: A New Framework for Tactical and Strategic Asset Allocation, SSRN, www.ssrn.com/ abstract=2321309.

Schwartz, Stephanie. 2011. Risk Parity: Taking the Long View Risk Parity. https://www.ipe.com/risk-parity-taking-the-long-view/40025.article, Acesso em 20 de abril de 2017.

Scutari, G., Facchinei, F., Song, P., Palomar, D. P. and Pang, J.-S. Decomposition by partial linearization: Parallel optimization of multi-agent systems. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 62, no. 3, pp. 641–656, Feb. 2014.

Silveira, Gutenberg de Araújo. Sistemas de Informação e o Processo Decisório. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Universidade Mackenzie. 1995.

Song, F., Babu, P. and Palomar, D. P. Sparse generalized eigenvalue problem via smooth optimization, IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 63, no. 7, pp. 1627–1642, April 2015.

Souza, P. O. D. 2015. Otimização de Portfólios de Investimento – A Estratégia de Paridade de Risco no Cenário Brasileiro. *Dissertação de Mestrado*, UFRGS.

Sriperumbudur, B. K., Torres, D. A. and Lanckriet, G. R. G. Sparse eigen methods by dc programming. In Proceedings of the 24th International Conference on Machine Learning. ACM, 2007, pp. 831–838.

Villela, P. F. Um algoritmo exato para a otimização de carteiras de investimento. Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, em desenvolvimento. Departamento de Matemática Aplicada, Universidade de Campinas, Campinas, Brasil, 2008.

VisiaInvestimentos. (2016). https://blog.visiainvestimentos.com.br/2016/10/03/introducao-a-paridade-de-riscos/, Acesso em 29 de julho de 2017.

Williams, J. B. The Theory of Investment Value. ISBN 0-87034-126-X. Harvard University Press, 1938.

Yang, Y., Pesavento, M., Chatzinotas, S. and Ottersten, B. Successive Convex Approximation Algorithms for Sparse Signal Estimation with Nonconvex Regularizations. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, special issue in Robust Subspace Learning, 10.1109/JSTSP.2018.2877584, 2018.

Apêndice A

Lista de Ativos da BM&FBOVESPA.

Código	Nome da Ação	Descrição da Ação
VALE3	Vale ON	Ação Ordinária da Vale S/A
GGBR4	Gerdau PN	Ação Preferencial da Gerdau S/A
CCRO3	CCR SA ON	Ação Ordinária da CCR S/A
BBAS3	Banco do Brasil ON	Ação Ordinária do Banco do Brasil S/A
TIMP3	Tim Part S.A. ON	Ação Ordinária da Tim Participações S/A
CIEL3	Cielo ON	Ação Ordinária da Cielo S/A
CMIG4	Cemig PN	Ação Preferencial da Companhia Energética de Minas Gerais - Cemig
EMBR3	Embraer ON	Ação Ordinária da Embraer S/A
CSNA3	Sid Nacional ON	Ação Ordinária da Companhia Siderúrgica Nacional
BRFS3	BRF S/A ON	Ação Ordinária da BRF S/A - Brasil Foods
POMO4	Marcopolo PN	Ação Preferencial da Marcopolo S/A
USIM5	Usiminas PNA	Ação Preferencial Classe A da Usinas Siderúrgicas de Minas Gerais S/A - Usiminas
SUZB5	Suzano Papel PNA	Ação Preferencial Classe A da Suzano Papel S/A
BRML3	BR Malls Par ON	Ação Ordinária da BR Malls Participações S/A
BBDC3	Bradesco ON	Ação Ordinária do Banco Bradesco S/A
LAME4	Lojas Americanas PN	Ação Preferencial da Lojas Americanas S/A
SANB11	Santander BR UNT	Ação unit - 55 ações ordinárias + 50 Preferenciais - Banco Santander
CRUZ3	Souza Cruz ON	Ação Ordinária da Souza Cruz S/A
HYPE3	Hypera ON	Ação Ordinária da Hypera S/A
GFSA3	Gafisa ON	Ação Ordinária da Gafisa S/A
VIVT4	Telef Brasil PN	Ação Preferencial Telefônica Brasil S/A
MRFG3	Marfrig ON	Ação Ordinária da Marfrig Global Foods S/A
SBSP3	Sabesp ON	Ação Ordinária da Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo - Sabesp
OIBR4	Oi PN	Ação Preferencial da Oi S/A
CPFE3	CPFL Energia ON	Ação Ordinária da CPFL Energia S/A
BRPR3	BR Propert ON	Ação Ordinária da BR Properties S/A
ESTC3	Estácio Part ON	Ação Ordinária da Estácio Participações S/A
MRVE3	MRV ON	Ação Ordinária da MRV Engenharia e Participações S/A
GOAU4	Gerdau Met PN	Ação Preferencial da Metalúrgica Gerdau S/A
BRKM5	Braskem PNA	Ação Preferencial Classe A da Braskem S/A
DTEX3	Duratex ON	Ação Ordinária da Duratex S/A
CTIP3	CETIP ON	Ação Ordinária da Central de Liquidação e Custódia de Títulos Privados
CYRE3	Cyrela Realt ON	Ação Ordinária da Cyrela Brazil Realty S/A Empreendimentos e Participações
ENBR3	Energias BR ON	Ação Ordinária da EDP - Energias do Brasil S/A
ELET3	Eletrobras ON	Ação Ordinária da Centrais Elétricas Brasileiras S/A - Eletrobras
BRAP4	Bradespar PN	Ação Preferencial da Bradespar S/A
FIBR3	Fibria ON	Ação Ordinária da Fibria Celulose S/A
ELET6	Eletrobras PNB	Ação Preferencial Classe B da Centrais Elétricas Brasileiras S/A - Eletrobras
TBLE3	Tractebel ON	Ação Ordinária da Tractebel Energia S/A
ECOR3	Ecorodovias ON	Ação Ordinária da Ecorodovias Infraestrutura E Logística S/A

Apêndice B

Lista de Ativos da S&P 500.

Código	Nome da Ação	Descrição da Ação
APA	Apache Corp	Empresa americana de exploração e produção de petróleo e gás natural
CAT	Caterpillar	Corporação americana que projeta, desenvolve, fabrica e comercializa máquinas
APC	Anadarko Petroleum Corp	Empresa de exploração e produção de petróleo e gás natural nos EUA
HPQ	Hewlett-Packard	Empresa multinacional americana de tecnologia da informação sediada na Califórnia
ABT	Abbott Laboratories	Empresa americana de assistência médica com sede em Illinois
CHK	Chesapeake Energy	Empresa americana de exploração e produção de petróleo e gás natural
ALB	Albemarle Corp	Empresa com sede na Carolina do Norte, especializada em fabricação de produtos químicos
AAP	Advance Auto Parts Inc	Varejista de autopeças e acessórios nos Estados Unidos, com sede na Carolina do Norte
KR	Kroger Co	Empresa americana de varejo, é a maior rede de supermercados dos Estados Unidos em receita, a segunda maior varejista geral e a décima sétima maior empresa dos Estados Unidos
AJG	Arthur J Gallagher & Co	Uma empresa global de serviços de corretagem de seguros e gerenciamento de risco sediada nos EUA, é a terceira maior corretora de seguros do mundo

Apêndice C

Base de dados com 10 Ativos da S&P 500

Os valores das variáveis utilizadas na implementação: r, um, betas, var_idx e CovMatrix, desta base, estão especificados abaixo:

```
% r = Vetor com os retornos dos ativos (r)
r=[-0.00353 0.00480 0.00540 -0.00280 0.00860 -0.00428 0.01053
0.01803 0.01939 0.00977];

% um = Retorno do índice de mercado (u_M); um=0.00978;

% betas = Vetor de betas de ativos (β)
betas=[1.578 1.648 1.728 1.615 0.900 1.768 1.885 0.794 0.717
1.02];

% var_idx = Variância do índice de mercado (σ_M^2); var_idx=0.00127;

% CovMatrix = Matriz de Covariância de r (Σ)
CovMatrix=[0.00917 0.00527 0.00701 0.00374 0.00098 0.00907 0.00540
0.00054 -0.00039 0.00196;
0.00527 0.00663 0.00518 0.00402 0.00121 0.00504 0.00583 0.00188
0.00032 0.00218;
0.00701 0.00518 0.00886 0.00401 0.00142 0.00979 0.00507 0.00159
0.00072 0.00252;
0.00374 0.00402 0.00401 0.00967 0.00168 0.00394 0.00495 0.00140
0.00122 0.00245;
0.00098 0.00121 0.00142 0.00168 0.00254 0.00102 0.00130 0.00082
0.00123 0.00133;
0.00907 0.00504 0.00979 0.00394 0.00102 0.02473 0.00400 0.00138
-0.00092 0.00271;
0.00540 0.00583 0.00507 0.00495 0.00130 0.00400 0.00909 0.00161
0.00107 0.00241;
0.00054 0.00188 0.00159 0.00140 0.00082 0.00138 0.00161 0.00474
0.00101 0.00150;
-0.00039 0.00032 0.00072 0.00122 0.00123 -0.00092 0.00107 0.00101
0.00353 0.00079;
0.00196 0.00218 0.00252 0.00245 0.00133 0.00271 0.00241 0.00150
0.00079 0.00229];
```

Apêndice D

Base de dados com 20 Ativos da BM&FBOVESPA

Os valores das variáveis utilizadas na implementação: r, um, betas, var_idx e CovMatrix, desta base, estão especificados abaixo:

% r = Vetor com os retornos dos ativos (r)
r=[-0.008274 -0.015163 -0.007738 -0.021506 -0.013836 0.001570 -0.018153 0.000375 0.000915 -0.013076 -0.014625 0.027641 0.011598 0.019332 0.006327 0.008462 0.023202 0.010817 0.006577 0.019158];

% um = Retorno do índice de mercado (u_M);um=0.001180;

% betas = Vetor de betas de ativos (β)
betas=[0.9179 1.0526 0.9904 1.9599 1.9004 0.9194 1.1137 1.1479 1.1032 1.4255 1.5424 0.4986 0.2072 0.4749 1.1295 0.8414 0.1161 0.8426 0.9541 0.8623];

% var_idx = Variância do índice de mercado (σ_M^2); var_idx=0.003025;

% CovMatrix = Matriz de Covariância de r (Σ)
CovMatrix=[0.005781 0.003117 0.005973 0.004427 0.007569 0.001129 0.003404 0.001500 0.003261 0.003854 0.004284 0.001323 0.000325 0.000903 0.001463 0.001567 -0.000188 0.001889 0.002029 0.001924;
0.003117 0.006673 0.003186 0.006232 0.006253 0.003317 0.006533 0.002930 0.003313 0.003675 0.003920 0.001173 0.000352 0.000946 0.002977 0.002336 0.000606 0.001913 0.002296 0.001935;
0.005973 0.003186 0.006390 0.004765 0.008111 0.001316 0.003434 0.001877 0.003562 0.004253 0.004880 0.001296 0.000296 0.000998 0.001847 0.001596 -0.000209 0.001956 0.002273 0.002116;
0.004427 0.006232 0.004765 0.019297 0.013665 0.005105 0.006553 0.008213 0.005261 0.008049 0.008586 0.001563 -0.000354 0.001758 0.008210 0.003819 0.000317 0.003866 0.005034 0.004207;
0.007569 0.006253 0.008111 0.013665 0.018177 0.003801 0.006539 0.006335 0.005187 0.008061 0.008981 0.001619 -0.000284 0.001494 0.006272 0.002780 -0.000249 0.002860 0.004505 0.003293;
0.001129 0.003317 0.001316 0.005105 0.003801 0.008821 0.003319 0.007512 0.002677 0.000669 0.000879 0.001633 0.000737 0.000925 0.007565 0.000969 0.000116 0.001965 0.001963 0.001208;
0.003404 0.006533 0.003434 0.006553 0.006539 0.003319 0.006979 0.003145 0.003666 0.003875 0.003948 0.001271 0.000480 0.001129 0.003171 0.002576 0.000354 0.001879 0.002598 0.002525;
0.001500 0.002930 0.001877 0.008213 0.006335 0.007512 0.003145 0.012032 0.002348 0.001489 0.001898 0.001344 0.000354 0.002012 0.011862 0.000357 -0.000234 0.001331 0.002009 0.001135;
0.003261 0.003313 0.003562 0.005261 0.005187 0.002677 0.003666 0.002348 0.012204 0.003932 0.004399 0.001130 0.001189 0.000893 0.002145 0.003098 0.000430 0.001854 0.002624 0.003568;
0.003854 0.003675 0.004253 0.008049 0.008061 0.000669 0.003875 0.001489 0.003932 0.011623 0.012518 0.002235 0.000699 0.002173 0.001465 0.005060 -0.000744 0.004754 0.005244 0.003358;
0.004284 0.003920 0.004880 0.008586 0.008981 0.000879 0.003948 0.001898 0.004399 0.012518 0.014172 0.002189 0.000550 0.002285 0.001863 0.005111 -0.000793 0.004981 0.005546 0.003116;

0.001323 0.001173 0.001296 0.001563 0.001619 0.001633 0.001271
0.001344 0.001130 0.002235 0.002189 0.004836 0.000949 0.000886
0.001409 0.001048 -0.000202 0.001812 0.001210 0.001440;
0.000325 0.000352 0.000296 -0.000354 -0.000284 0.000737 0.000480
0.000354 0.001189 0.000699 0.000550 0.000949 0.002697 0.000768
0.000189 0.001032 0.000948 0.001363 0.000936 -0.000691;
0.000903 0.000946 0.000998 0.001758 0.001494 0.000925 0.001129
0.002012 0.000893 0.002173 0.002285 0.000886 0.000768 0.003376
0.001927 0.001596 0.000367 0.001640 0.001456 0.001202;
0.001463 0.002977 0.001847 0.008210 0.006272 0.007565 0.003171
0.011862 0.002145 0.001465 0.001863 0.001409 0.000189 0.001927
0.011793 0.000245 -0.000360 0.001314 0.001945 0.001031;
0.001567 0.002336 0.001596 0.003819 0.002780 0.000969 0.002576
0.000357 0.003098 0.005060 0.005111 0.001048 0.001032 0.001596
0.000245 0.005988 0.001282 0.003328 0.003115 0.004001;
-0.000188 0.000606 -0.000209 0.000317 -0.000249 0.000116 0.000354
-0.000234 0.000430 -0.000744 -0.000793 -0.000202 0.000948 0.000367
-0.000360 0.001282 0.003205 0.000686 0.001043 0.000650;
0.001889 0.001913 0.001956 0.003866 0.002860 0.001965 0.001879
0.001331 0.001854 0.004754 0.004981 0.001812 0.001363 0.001640
0.001314 0.003328 0.000686 0.005521 0.003598 0.002464;
0.002029 0.002296 0.002273 0.005034 0.004505 0.001963 0.002598
0.002009 0.002624 0.005244 0.005546 0.001210 0.000936 0.001456
0.001945 0.003115 0.001043 0.003598 0.005676 0.002620;
0.001924 0.001935 0.002116 0.004207 0.003293 0.001208 0.002525
0.001135 0.003568 0.003358 0.003116 0.001440 -0.000691 0.001202
0.001031 0.004001 0.000650 0.002464 0.002620 0.011069];

Apêndice E

Base de dados com 40 Ativos da BM&FBOVESPA

Os valores das variáveis utilizadas na implementação: r, um, betas, var_idx e CovMatrix, desta base, estão especificados abaixo:

% r = Vetor com os retornos dos ativos (r)
r=[-0.004770 -0.010350 0.013608 0.009339 0.008723 0.028926 0.014213
0.017954 -0.005317 0.019779 0.012327 -0.012491 0.007909 0.009620
0.013354 0.015155 0.004408 0.019149 0.004721 -0.011978 0.013022 -
0.014291 0.015356 -0.027102 0.007597 0.006572 0.020608 0.002951 -
0.013638 0.008452 0.000339 0.018270 -0.004132 0.006997 -0.006282 -
0.009672 0.008547 -0.002481 0.014145 0.003976];

% um = Retorno do índice de mercado (u_M); um=0.005088;

% betas = Vetor de betas de ativos (β)
betas=[0.9834 1.0860 0.7306 1.7802 0.3141 0.6908 0.7545 0.1091
1.9014 0.4464 0.8932 1.9554 0.9140 0.8982 1.0638 1.1185 1.0946
0.6826 1.2101 1.9963 0.3786 1.0864 1.1877 1.2174 0.6332 0.9296
1.1641 1.5650 1.1759 1.2582 1.0832 0.3913 1.1199 0.6964 1.3631
1.0810 0.8427 1.2786 0.4914 0.4330];

% var_idx = Variância do índice de mercado (σ_M^2); var_idx=0.002001;

% CovMatrix = Matriz de Covariância de r (Σ)
CovMatrix=[0.00669 0.00327 0.00072 0.00369 0.00055 0.00131 0.00121
0.00087 0.00894 0.00100 0.00079 0.00489 0.00193 0.00064 0.00148
0.00147 0.00194 0.00063 0.00137 0.00407 0.00026 0.00025 0.00137
0.00279 -0.00001 0.00088 0.00206 0.00226 0.00345 0.00352 0.00043
0.00088 0.00063 0.00020 0.00123 0.00659 0.00130 0.00280 0.00040
-0.00005;
0.00327 0.00647 0.00086 0.00323 0.00085 0.00105 0.00078 0.00010
0.00644 0.00092 0.00077 0.00625 0.00288 0.00066 0.00171 0.00184
0.00252 0.00135 0.00237 0.00332 0.00020 0.00141 0.00198 0.00264
0.00095 0.00156 0.00176 0.00444 0.00642 0.00308 0.00173 0.00009
0.00256 0.00056 0.00132 0.00339 0.00301 0.00161 0.00083 -0.00024;
0.00072 0.00086 0.00320 0.00340 0.00030 0.00127 0.00138 0.00027
0.00136 0.00109 0.00132 0.00168 0.00026 0.00248 0.00228 0.00155
0.00137 0.00132 0.00205 0.00214 0.00099 0.00096 0.00228 0.00029
0.00088 0.00247 0.00199 0.00124 0.00092 0.00125 0.00137 0.00092
0.00162 0.00149 0.00261 0.00097 0.00081 0.00208 0.00113 0.00191;
0.00369 0.00323 0.00340 0.01047 0.00045 0.00204 0.00271 0.00010
0.00714 0.00196 0.00276 0.00715 0.00262 0.00462 0.00513 0.00432
0.00422 0.00139 0.00440 0.00796 0.00120 0.00189 0.00300 0.00152
0.00192 0.00281 0.00329 0.00689 0.00343 0.00337 0.00439 0.00192
0.00439 0.00298 0.00538 0.00391 0.00220 0.00497 0.00166 0.00164;
0.00055 0.00085 0.00030 0.00045 0.00533 0.00038 0.00036 -0.00031
0.00134 0.00071 -0.00057 -0.00029 0.00006 0.00027 0.00034 -0.00014
-0.00030 0.00062 0.00157 0.00055 0.00160 0.00016 0.00093 0.00154
0.00062 0.00035 -0.00068 0.00097 0.00142 0.00165 0.00046 0.00042
0.00019 0.00005 0.00065 0.00086 0.00076 0.00061 -0.00008 0.00062;
0.00131 0.00105 0.00127 0.00204 0.00038 0.00481 0.00280 -0.00011
0.00174 0.00087 0.00083 0.00153 0.00144 0.00054 0.00168 0.00189

0.00184 0.00144 0.00071 0.00107 0.00093 0.00154 0.00229 0.00093
0.00110 0.00146 0.00134 0.00120 0.00117 0.00106 0.00052 0.00050
0.00140 0.00132 0.00289 0.00155 0.00157 0.00226 0.00067 0.00048;
0.00121 0.00078 0.00138 0.00271 0.00036 0.00280 0.00674 -0.00064
0.00136 -0.00019 0.00125 0.00123 -0.00187 0.00129 0.00221 0.00216
0.00224 0.00141 0.00209 0.00008 0.00121 0.00215 0.00272 0.00179
0.00224 0.00107 0.00117 0.00062 0.00064 0.00121 0.00189 0.00073
0.00056 0.00257 0.00356 0.00205 -0.00097 0.00327 0.00186 0.00146;
0.00087 0.00010 0.00027 0.00010 -0.00031 -0.00011 -0.00064 0.00547
0.00098 0.00031 0.00040 -0.00003 0.00253 -0.00012 0.00057 -0.00075
0.00029 -0.00021 -0.00110 0.00024 -0.00019 0.00113 -0.00040 0.00026
-0.00058 0.00070 0.00134 -0.00166 0.00019 -0.00080 -0.00036 -
0.00041 -0.00077 -0.00135 -0.00046 0.00076 0.00142 0.00081 -0.00003
0.00024;
0.00894 0.00644 0.00136 0.00714 0.00134 0.00174 0.00136 0.00098
0.01971 0.00145 0.00168 0.01368 0.00640 0.00114 0.00229 0.00199
0.00350 0.00073 0.00356 0.00794 -0.00034 -0.00161 0.00325 0.00357
0.00063 0.00236 0.00304 0.00592 0.00661 0.00504 0.00205 0.00090
0.00157 0.00195 0.00482 0.00861 0.00382 0.00682 0.00042 -0.00057;
0.00100 0.00092 0.00109 0.00196 0.00071 0.00087 -0.00019 0.00031
0.00145 0.00337 0.00035 0.00170 0.00193 0.00023 0.00152 0.00044
0.00065 0.00028 0.00071 0.00279 0.00075 0.00085 0.00018 -0.00181
0.00085 0.00080 0.00116 0.00117 0.00108 0.00087 -0.00006 0.00131
0.00147 0.00072 0.00093 0.00110 0.00089 0.00112 -0.00013 0.00039;
0.00079 0.00077 0.00132 0.00276 -0.00057 0.00083 0.00125 0.00040
0.00168 0.00035 0.00828 0.00321 0.00152 0.00287 0.00136 0.00228
0.00065 0.00167 0.00126 0.00434 0.00012 0.00280 0.00205 0.00468
0.00105 0.00056 0.00371 0.00307 0.00085 0.00273 0.00250 0.00088
0.00168 0.00137 0.00127 0.00075 0.00061 0.00101 0.00131 0.00148;
0.00489 0.00625 0.00168 0.00715 -0.00029 0.00153 0.00123 -0.00003
0.01368 0.00170 0.00321 0.01830 0.00821 0.00167 0.00406 0.00385
0.00372 0.00095 0.00408 0.00909 -0.00033 0.00016 0.00429 0.00437
0.00185 0.00286 0.00383 0.00649 0.00646 0.00448 0.00454 -0.00032
0.00348 0.00213 0.00309 0.00466 0.00547 0.00327 0.00076 0.00004;
0.00193 0.00288 0.00026 0.00262 0.00006 0.00144 -0.00187 0.00253
0.00640 0.00193 0.00152 0.00821 0.01190 -0.00100 0.00171 0.00143
0.00151 0.00049 0.00150 0.00424 0.00023 0.00238 0.00019 0.00113
-0.00010 0.00107 0.00098 0.00289 0.00310 0.00193 0.00035 0.00015
0.00175 -0.00030 0.00059 0.00148 0.00763 0.00078 -0.00121 -0.00156;
0.00064 0.00066 0.00248 0.00462 0.00027 0.00054 0.00129 -0.00012
0.00114 0.00023 0.00287 0.00167 -0.00100 0.00655 0.00265 0.00278
0.00126 0.00185 0.00172 0.00370 0.00097 0.00164 0.00258 0.00177
0.00172 0.00281 0.00281 0.00294 0.00114 0.00074 0.00325 0.00163
0.00226 0.00188 0.00199 0.00098 0.00003 0.00111 0.00148 0.00239;
0.00148 0.00171 0.00228 0.00513 0.00034 0.00168 0.00221 0.00057
0.00229 0.00152 0.00136 0.00406 0.00171 0.00265 0.00480 0.00275
0.00332 0.00188 0.00240 0.00450 0.00140 0.00258 0.00175 0.00046
0.00138 0.00183 0.00184 0.00270 0.00175 0.00141 0.00275 0.00087
0.00292 0.00153 0.00282 0.00175 0.00226 0.00192 0.00155 0.00109;
0.00147 0.00184 0.00155 0.00432 -0.00014 0.00189 0.00216 -0.00075
0.00199 0.00044 0.00228 0.00385 0.00143 0.00278 0.00275 0.00566
0.00284 0.00222 0.00314 0.00464 0.00112 0.00157 0.00240 0.00244
0.00163 0.00184 0.00311 0.00488 0.00218 0.00366 0.00314 0.00000
0.00338 0.00145 0.00269 0.00193 0.00177 0.00145 0.00125 0.00130;
0.00194 0.00252 0.00137 0.00422 -0.00030 0.00184 0.00224 0.00029
0.00350 0.00065 0.00065 0.00372 0.00151 0.00126 0.00332 0.00284
0.00697 0.00192 0.00279 0.00537 0.00069 0.00235 0.00189 0.00162

0.00130	0.00120	0.00220	0.00311	0.00224	0.00192	0.00154	0.00134
0.00321	0.00156	0.00398	0.00226	0.00118	0.00365	0.00093	0.00083;
0.00063	0.00135	0.00132	0.00139	0.00062	0.00144	0.00141	-0.00021
0.00073	0.00028	0.00167	0.00095	0.00049	0.00185	0.00188	0.00222
0.00192	0.00493	0.00191	0.00302	0.00160	0.00241	0.00219	0.00176
0.00089	0.00157	0.00034	0.00241	0.00127	0.00151	0.00175	0.00045
0.00247	0.00106	-0.00002	0.00062	0.00087	-0.00103	0.00114	0.00160;
0.00137	0.00237	0.00205	0.00440	0.00157	0.00071	0.00209	-0.00110
0.00356	0.00071	0.00126	0.00408	0.00150	0.00172	0.00240	0.00314
0.00279	0.00191	0.01070	0.00468	0.00036	0.00103	0.00257	0.00112
0.00121	0.00257	0.00279	0.00516	0.00239	0.00281	0.00520	0.00081
0.00313	0.00192	0.00302	0.00154	0.00194	0.00178	0.00176	0.00184;
0.00407	0.00332	0.00214	0.00796	0.00055	0.00107	0.00008	0.00024
0.00794	0.00279	0.00434	0.00909	0.00424	0.00370	0.00450	0.00464
0.00537	0.00302	0.00468	0.02195	0.00027	0.00550	0.00282	0.00294
0.00076	0.00206	0.00658	0.00846	0.00325	0.00575	0.00416	0.00172
0.00665	0.00172	0.00285	0.00311	0.00217	0.00224	0.00033	0.00082;
0.00026	0.00020	0.00099	0.00120	0.00160	0.00093	0.00121	-0.00019
-0.00034	0.00075	0.00012	-0.00033	0.00023	0.00097	0.00140	0.00112
0.00069	0.00160	0.00036	0.00027	0.00269	0.00104	0.00101	0.00208
0.00095	0.00079	-0.00079	0.00025	0.00034	0.00120	0.00073	0.00057
0.00078	0.00102	0.00146	0.00038	0.00063	0.00099	0.00050	0.00065;
0.00025	0.00141	0.00096	0.00189	0.00016	0.00154	0.00215	0.00113
-0.00161	0.00085	0.00280	0.00016	0.00238	0.00164	0.00258	0.00157
0.00235	0.00241	0.00103	0.00550	0.00104	0.01882	0.00266	0.00276
0.00181	0.00199	0.00273	0.00137	0.00148	0.00204	0.00163	0.00228
0.00304	0.00087	0.00376	0.00046	0.00194	0.00294	0.00100	0.00119;
0.00137	0.00198	0.00228	0.00300	0.00093	0.00229	0.00272	-0.00040
0.00325	0.00018	0.00205	0.00429	0.00019	0.00258	0.00175	0.00240
0.00189	0.00219	0.00257	0.00282	0.00101	0.00266	0.00751	0.00615
0.00216	0.00320	0.00352	0.00191	0.00271	0.00248	0.00290	0.00094
0.00213	0.00253	0.00351	0.00203	0.00111	0.00325	0.00167	0.00137;
0.00279	0.00264	0.00029	0.00152	0.00154	0.00093	0.00179	0.00026
0.00357	-0.00181	0.00468	0.00437	0.00113	0.00177	0.00046	0.00244
0.00162	0.00176	0.00112	0.00294	0.00208	0.00276	0.00615	0.01891
0.00113	0.00145	0.00286	0.00345	0.00345	0.00419	0.00261	-0.00020
0.00098	0.00148	0.00171	0.00314	0.00149	0.00209	0.00137	0.00053;
-0.00001	0.00095	0.00088	0.00192	0.00062	0.00110	0.00224	-0.00058
0.00063	0.00085	0.00105	0.00185	-0.00010	0.00172	0.00138	0.00163
0.00130	0.00089	0.00121	0.00076	0.00095	0.00181	0.00216	0.00113
0.00324	0.00179	0.00126	0.00070	0.00106	0.00109	0.00186	0.00066
0.00175	0.00239	0.00296	0.00048	0.00018	0.00229	0.00138	0.00125;
0.00088	0.00156	0.00247	0.00281	0.00035	0.00146	0.00107	0.00070
0.00236	0.00080	0.00056	0.00286	0.00107	0.00281	0.00183	0.00184
0.00120	0.00157	0.00257	0.00206	0.00079	0.00199	0.00320	0.00145
0.00179	0.00682	0.00267	0.00275	0.00210	0.00124	0.00241	0.00048
0.00263	0.00133	0.00192	0.00136	0.00106	0.00213	0.00168	0.00177;
0.00206	0.00176	0.00199	0.00329	-0.00068	0.00134	0.00117	0.00134
0.00304	0.00116	0.00371	0.00383	0.00098	0.00281	0.00184	0.00311
0.00220	0.00034	0.00279	0.00658	-0.00079	0.00273	0.00352	0.00286
0.00126	0.00267	0.01088	0.00338	0.00238	0.00314	0.00260	0.00101
0.00333	0.00031	0.00111	0.00265	0.00089	0.00193	0.00106	0.00161;
0.00226	0.00444	0.00124	0.00689	0.00097	0.00120	0.00062	-0.00166
0.00592	0.00117	0.00307	0.00649	0.00289	0.00294	0.00270	0.00488
0.00311	0.00241	0.00516	0.00846	0.00025	0.00137	0.00191	0.00345
0.00070	0.00275	0.00338	0.01511	0.00471	0.00515	0.00555	0.00045
0.00660	0.00083	0.00157	0.00224	0.00234	0.00054	0.00120	0.00001;

0.00345	0.00642	0.00092	0.00343	0.00142	0.00117	0.00064	0.00019
0.00661	0.00108	0.00085	0.00646	0.00310	0.00114	0.00175	0.00218
0.00224	0.00127	0.00239	0.00325	0.00034	0.00148	0.00271	0.00345
0.00106	0.00210	0.00238	0.00471	0.00689	0.00339	0.00191	0.00016
0.00276	0.00044	0.00121	0.00382	0.00310	0.00159	0.00075	-0.00010;
0.00352	0.00308	0.00125	0.00337	0.00165	0.00106	0.00121	-0.00080
0.00504	0.00087	0.00273	0.00448	0.00193	0.00074	0.00141	0.00366
0.00192	0.00151	0.00281	0.00575	0.00120	0.00204	0.00248	0.00419
0.00109	0.00124	0.00314	0.00515	0.00339	0.01189	0.00231	-0.00024
0.00203	0.00089	0.00270	0.00334	0.00236	0.00246	0.00147	0.00039;
0.00043	0.00173	0.00137	0.00439	0.00046	0.00052	0.00189	-0.00036
0.00205	-0.00006	0.00250	0.00454	0.00035	0.00325	0.00275	0.00314
0.00154	0.00175	0.00520	0.00416	0.00073	0.00163	0.00290	0.00261
0.00186	0.00241	0.00260	0.00555	0.00191	0.00231	0.00700	-0.00041
0.00360	0.00188	0.00216	0.00045	0.00145	0.00101	0.00214	0.00134;
0.00088	0.00009	0.00092	0.00192	0.00042	0.00050	0.00073	-0.00041
0.00090	0.00131	0.00088	-0.00032	0.00015	0.00163	0.00087	0.00000
0.00134	0.00045	0.00081	0.00172	0.00057	0.00228	0.00094	-0.00020
0.00066	0.00048	0.00101	0.00045	0.00016	-0.00024	-0.00041	0.00482
0.00043	0.00141	0.00121	0.00128	-0.00069	0.00168	-0.00047	0.00115;
0.00063	0.00256	0.00162	0.00439	0.00019	0.00140	0.00056	-0.00077
0.00157	0.00147	0.00168	0.00348	0.00175	0.00226	0.00292	0.00338
0.00321	0.00247	0.00313	0.00665	0.00078	0.00304	0.00213	0.00098
0.00175	0.00263	0.00333	0.00660	0.00276	0.00203	0.00360	0.00043
0.00739	0.00147	0.00120	0.00097	0.00201	0.00021	0.00127	0.00051;
0.00020	0.00056	0.00149	0.00298	0.00005	0.00132	0.00257	-0.00135
0.00195	0.00072	0.00137	0.00213	-0.00030	0.00188	0.00153	0.00145
0.00156	0.00106	0.00192	0.00172	0.00102	0.00087	0.00253	0.00148
0.00239	0.00133	0.00031	0.00083	0.00044	0.00089	0.00188	0.00141
0.00147	0.00378	0.00388	0.00058	0.00006	0.00323	0.00126	0.00133;
0.00123	0.00132	0.00261	0.00538	0.00065	0.00289	0.00356	-0.00046
0.00482	0.00093	0.00127	0.00309	0.00059	0.00199	0.00282	0.00269
0.00398	-0.00002	0.00302	0.00285	0.00146	0.00376	0.00351	0.00171
0.00296	0.00192	0.00111	0.00157	0.00121	0.00270	0.00216	0.00121
0.00120	0.00388	0.01519	0.00147	0.00124	0.01280	0.00187	0.00099;
0.00659	0.00339	0.00097	0.00391	0.00086	0.00155	0.00205	0.00076
0.00861	0.00110	0.00075	0.00466	0.00148	0.00098	0.00175	0.00193
0.00226	0.00062	0.00154	0.00311	0.00038	0.00046	0.00203	0.00314
0.00048	0.00136	0.00265	0.00224	0.00382	0.00334	0.00045	0.00128
0.00097	0.00058	0.00147	0.00735	0.00120	0.00325	0.00055	0.00066;
0.00130	0.00301	0.00081	0.00220	0.00076	0.00157	-0.00097	0.00142
0.00382	0.00089	0.00061	0.00547	0.00763	0.00003	0.00226	0.00177
0.00118	0.00087	0.00194	0.00217	0.00063	0.00194	0.00111	0.00149
0.00018	0.00106	0.00089	0.00234	0.00310	0.00236	0.00145	-0.00069
0.00201	0.00006	0.00124	0.00120	0.00870	0.00095	0.00013	-0.00144;
0.00280	0.00161	0.00208	0.00497	0.00061	0.00226	0.00327	0.00081
0.00682	0.00112	0.00101	0.00327	0.00078	0.00111	0.00192	0.00145
0.00365	-0.00103	0.00178	0.00224	0.00099	0.00294	0.00325	0.00209
0.00229	0.00213	0.00193	0.00054	0.00159	0.00246	0.00101	0.00168
0.00021	0.00323	0.01280	0.00325	0.00095	0.01453	0.00117	0.00077;
0.00040	0.00083	0.00113	0.00166	-0.00008	0.00067	0.00186	-0.00003
0.00042	-0.00013	0.00131	0.00076	-0.00121	0.00148	0.00155	0.00125
0.00093	0.00114	0.00176	0.00033	0.00050	0.00100	0.00167	0.00137
0.00138	0.00168	0.00106	0.00120	0.00075	0.00147	0.00214	-0.00047
0.00127	0.00126	0.00187	0.00055	0.00013	0.00117	0.00234	0.00095;
-0.00005	-0.00024	0.00191	0.00164	0.00062	0.00048	0.00146	0.00024
-0.00057	0.00039	0.00148	0.00004	-0.00156	0.00239	0.00109	0.00130
0.00083	0.00160	0.00184	0.00082	0.00065	0.00119	0.00137	0.00053

0.00125	0.00177	0.00161	0.00001	-0.00010	0.00039	0.00134	0.00115
0.00051	0.00133	0.00099	0.00066	-0.00144	0.00077	0.00095	0.00401];